750

CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERIA
"LA LINEA RECTA"

FUNCIONES Y LIMITES

Por:
RODOLFO EMILIO DEL POZO
estudiantes de Ingenieria Civil

Serie: 1.01
Public: 1/4

Buenos Aires, sesenta y uno

Copyrigth by " CENTRO ESTUDIANTES DE INGENIERIA "LA LINEA RECTA "
Queda hecho el depósito de ley
Buenos Aires,20 de julio de 1961

CAPITULO I

NOCION DE FUNCION

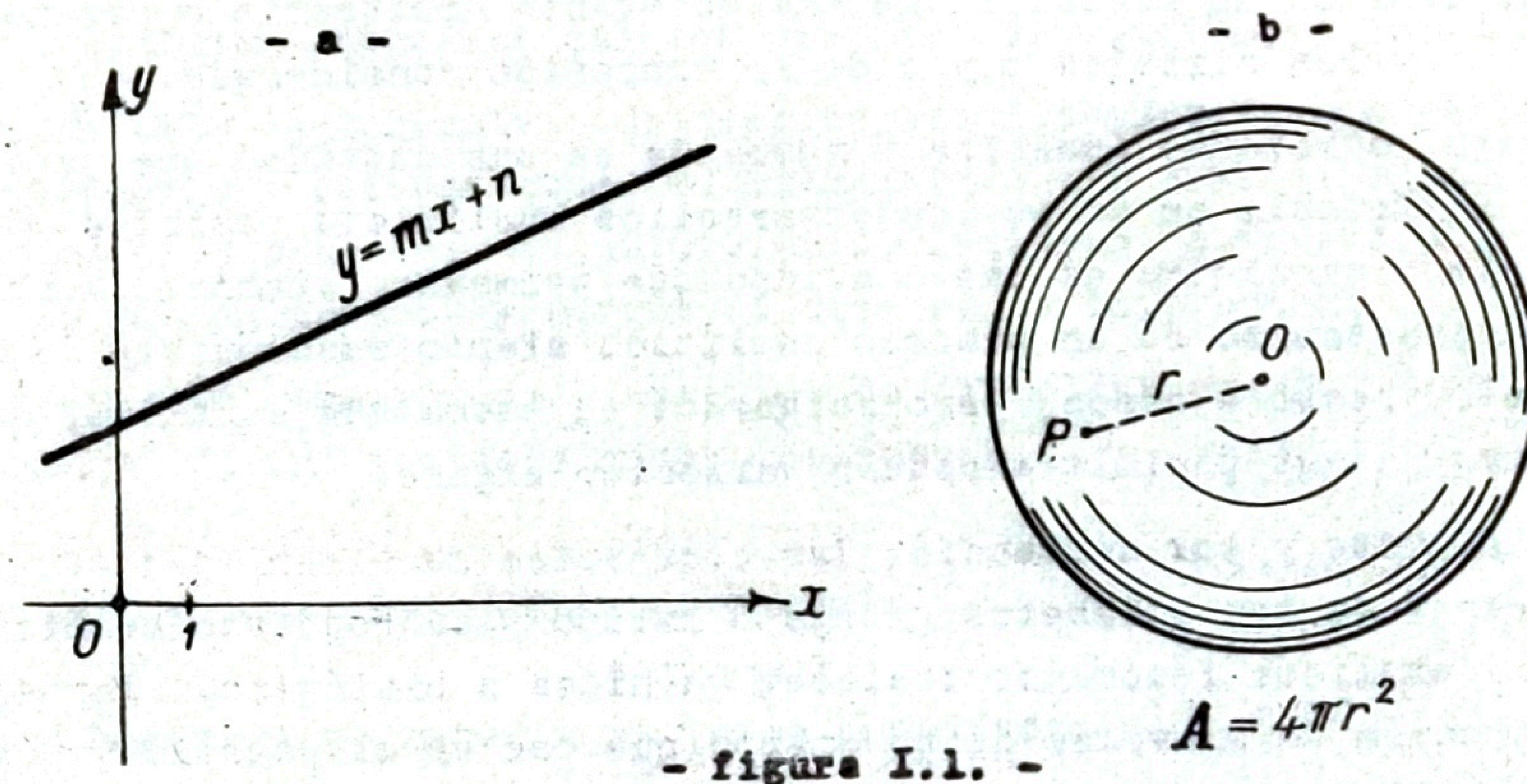
I.1.- Constantes y variables.- En los desarrollos matemáticos, teóricos o prácticos, de que se valen tanto las ciencias como las artes y que se emplean aún en las cuestiones de la vida ordinaria, se utilizan símbolos, habitualmente letras, algunos de los cuales conservan durante sus transcursos los mismos valores, ya en una forma permanente, ya solamente para el desarrollo en cuestión y no para otros, en tanto que los restantes asumen diferentes valores. Así, es frecuente en la expresión:

$$y = mx + n$$

que gráficamente representa una recta (figura I.1-a) asignar a los símbolos x o y cantidades variables, en tanto que a los valores de m y n se los hace permanecer invariables. De igual modo, en la expresión:

$$A = 4\pi r^2$$

que representa el área de una esfera de radio r (figura I.1-b), los símbolos A y r asumen distintos valores, en tanto que 4 y π permanecen invariables.



- figura I.1. -

Llamaremos constantes a los símbolos que durante el desarrollo de un proceso analítico conservan los mismos valores, y variables a los que asumen distintos valores durante el transcurso de esos procesos.

Inducimos pues de estas observaciones que una variable es una cantidad a quien se asigna durante el transcurso de un proceso analítico diferentes valores. En las expresiones consideradas x, y, A, r, son cantidades variables.

Usualmente y por convención las variables se designan por las últimas letras de los alfabetos griego o latino y se clasifican en reales y complejas según contengan respectivos valores numéricos a los indicados.

Por su parte, las reales, se clasifican en racionales o irracionales; aquéllas en enteras o fraccionarias y, finalmente, ambas, en positivas o negativas.

Daremos por entendido, cada vez que nos refiramos a las variables y específicamente no indiquemos lo contrario, que consideramos variables reales. Estas limitaciones la imponemos por razones pedagógicas y por razones que conciernen más a las cuestiones prácticas que a las teóricas. Por lo tanto: el campo de existencia o de variabilidad de nuestras variables será el real.

El concepto de variable no se circunscribe a procesos de carácter puramente analíticos sino que, por el contrario, cuando se tratan de explicar fenómenos físicos, químicos o biológicos es frecuente trabajar con ellas. Baste solamente mencionar el volumen de un gas sometido a diferentes presiones, la velocidad de caída de un cuerpo en el espacio o su tiempo transcurrido para tener indicados así unos pocos ejemplos.

Por su parte la constante es una cantidad a quien se asigna durante el transcurso de un proceso analítico un único valor, o si se quiere, es una cantidad que permanece invariable durante el proceso de que se trata.

Si el valor se mantiene fijo para todos los procesos analíticos posibles estamos en presencia de una constante numérica o absoluta cuyos ejemplos los encontramos en los símbolos 4 y π de la expresión ya conocida y, en general, en cualquier cantidad numérica; en cambio, cuando el valor no varía durante uno o más procesos pero la variación se produce con respecto a otros, estamos en presencia de una constante arbitraria o parámetro como acontece con los símbolos m y n de la expresión considerada.

Luego: constante numérica o absoluta es una cantidad que permanece siempre invariable en todos los desarrollos analíticos posibles. Constante arbitraria o parámetro es una cantidad que permanece siempre invariable durante el transcurso de un proceso analítico siendo susceptible de variación con respecto a otros, pero asignados en éstos una cantidad, durante su transcurso, no es posible efectuar variación alguna.

Usualmente y por convención las constantes se simbolizan con las primeras letras de los alfabetos griego o latino y su concepto también se utiliza para explicar fenómenos físicos, químicos o biológicos. Por ejemplo: la aceleración de gravedad de un cuerpo que cae en el espacio y que los físicos simbolizan con la letra g, es una constante numérica, mientras que la velocidad inicial del movimiento uniformemente variado de una partícula, es una constante arbitraria.

I.2.- Intervalo de una variable.- En los desarrollos analíticos, es frecuente imponer limitaciones a los valores que pueden adquirir las cantidades variables. Una de ellas, ya lo hemos dicho en I.L., es limitar su campo de existencia al de los números reales. Pero esa limitación necesaria no

es suficiente porque frecuentemente habremos de encontrar conque pasando ciertos valores límites hay expresiones que carecen de sentido.

Así, por ejemplo, sabemos que la logaritmación de un número negativo o de cero, como ser log x, es una expresión carente de sentido. De aquí inducimos entonces que si $x \leqslant 0$ en la logaritmación, la operación no tiene solución posible. También sabemos que en la división si el divisor es cero el cociente no existe; es decir que la expresión $\frac{a}{x}$, siendo a una constante, carecerá de sentido cuando $x = 0$. A poco que se medite se comprenderá que los ejemplos son múltiples.

Ante estas necesidades debemos imponer entonces una nueva limitación a los valores que tomen las variables, limitación que, cuando se observa entre dos valores límites fijos, recibe el nombre de intervalo de variación de una variable, o simplemente, intervalo de una variable.

Por lo tanto, podemos decir que: el intervalo (a , b) de una variable x indica los valores límites fijos -a y b- entre los cuales dicha variable puede variar. Los valores límites fijos -a y b- del intervalo son sus extremos. Simbólicamente cualquiera de las notaciones siguientes:

$$(a\,,\,b) \quad ; \quad a < x < b \quad ; \quad [a\,,\,b]$$

indican el intervalo de una variable. Nosotros, con las salvedades indicadas en el presente parágrafo emplearemos las dos primeras. Así, la expresión $\frac{a}{x}$, siendo a una constante, tendrá solución posible siempre que $x \neq 0$, o sea, siempre que:

$$-\infty < x < 0 \qquad (-\infty, 0)$$
$$0 < x < \infty \quad ; \quad (0, \infty)$$

Surge el siguiente interrogante: ¿los extremos del intervalo de una variable, se incluyen entre los valores posibles de aquélla, o no?

La respuesta es que, ante cada caso especial, tendremos que realizar un estudio especial, y así entonces, es evidente de que para el ejemplo de la división $\frac{a}{x}$, los extremos $-\infty$, $0, \infty$, no se incluyen, porque las expresiones $-\infty, \infty$, no son números y porque el cero es la limitación.

En otras palabras surge la cuestión de dilucidar cuando, para un intervalo (a , b) de una variable x, debemos escribir la desigualdad:

$$a < x < b$$

o cuando, por el contrario, debemos hacerlo:

$$a \leqslant x \leqslant b$$

o bien, cuando podemos hacerlo en forma combinada:

$$a \leqslant x < b$$
$$a < x \leqslant b$$

Por su parte, advertimos que los extremos algunas veces indican una cantidad determinada, a, b, 0; otras no, $-\infty, \infty$.

De estas observaciones deducimos entonces que resulta, más que, todo por razones de orden práctico, clasificar los intervalos de variación de una variable.

Distinguiremos así entonces intervalos abiertos o cerrados. Llamaremos intervalo abierto (a , b) de una variable x a aquéllos cuyos extremos no se incluyen dentro del conjunto de valores que la variable puede tomar; o sea los que satisfacen la desigualdad:

$$a < x < b$$

y a quien simbolizaremos con la notación [a , b] .

Inversamente, llamaremos intervalo cerrado (a , b) de una variable x a aquéllos cuyos extremos están incluídos dentro del conjunto de valores que la variable puede tomar; vale decir que, en este caso, se satisface la desigualdad:

$$a \leq x \leq b$$

y lo simbolizaremos con la notación (a , b).

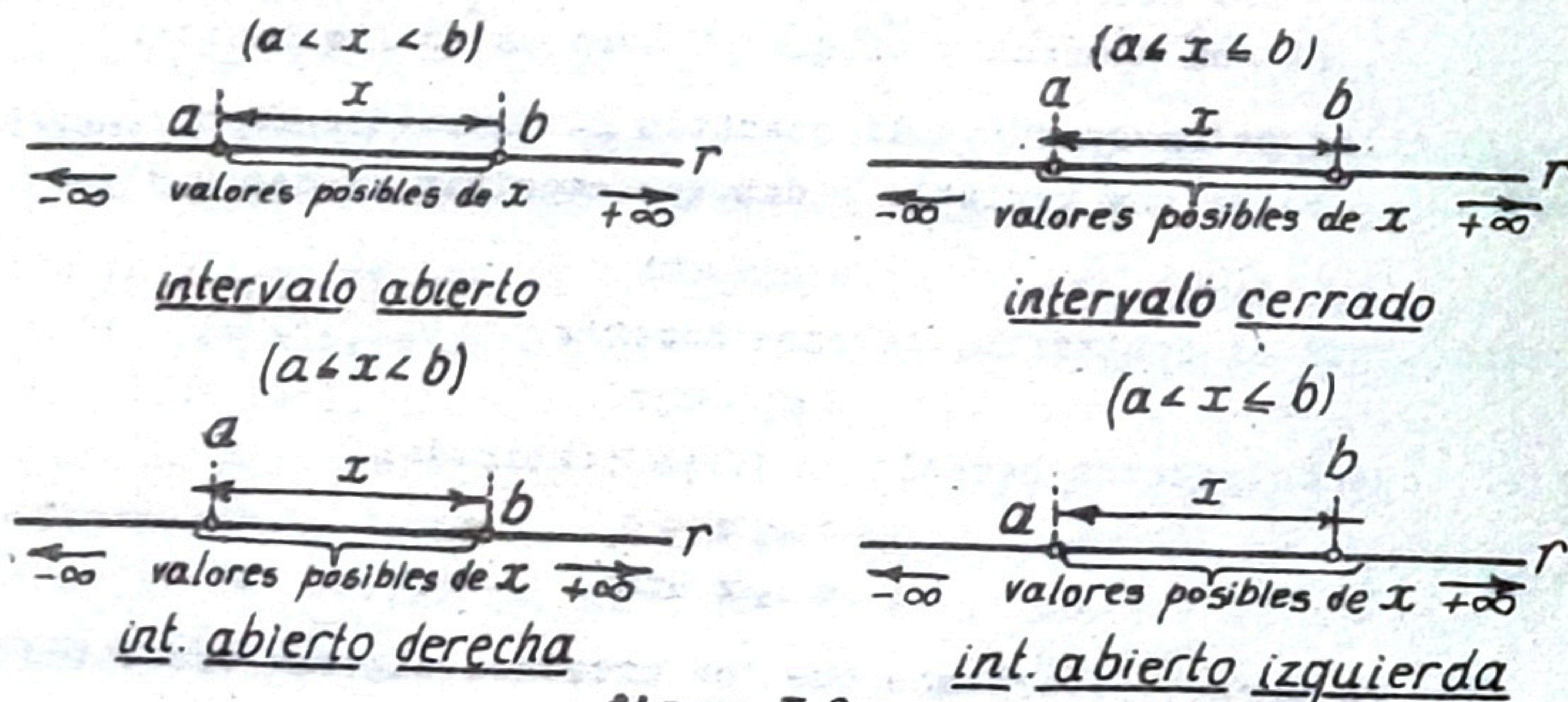
A su vez, los intervalos abiertos (a , b) de una variable x puede serlo tanto a la derecha como a la izquierda según que sus extremos derechos o izquierdos, respectivamente, no se incluyan dentro del conjunto de valores que tome la variable. En estos casos, respectivamente se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$a \leq x < b \qquad\qquad a < x \leq b$$

y hemos de simbolizarlos con las notaciones (a , b] y [a , b), respectivamente.

Durante todo el transcurso del presente parágrafo hemos supuesto que $a > b$, puesto que si $a < b$ se darían las situaciones inversas, mientras que si a = b no se podría hablar de intervalo con lo que la variable no tendría carácter de tal pues sería una constante.

Teniendo en cuenta que los puntos de una recta r representan números reales podemos interpretar gráficamente los intervalos abiertos y cerrados (a , b) de una variable x ya definidos, como lo indica la figura I.2., suponiendo siempre que $a < b$.



- figura I.2. -

Cuando los extremos a y b del intervalo (a , b) de una variable x están determinados, el intervalo es finito y se presentan algunas de las posibilidades definidas; el intervalo será entonces simplemente abierto, o bien abierto hacia la derecha o izquierda, o cerrado.

Cuando los extremos del intervalo de una variable x no se hallan determinados, éste es infinito. Luego: los intervalos infinitos posibles de una variable x son los conjuntos siguientes:

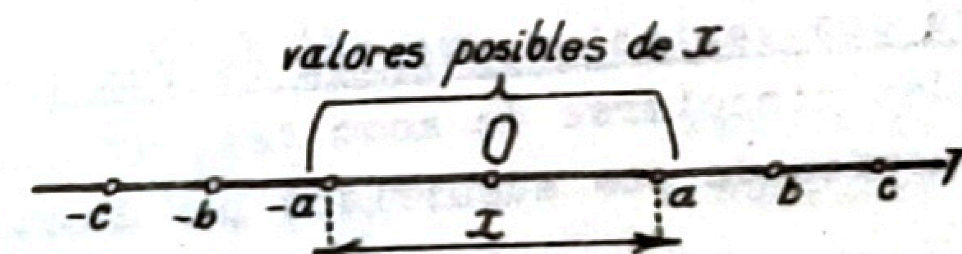
(a , ∞)	en donde	$a \leq x < \infty$	o sea $a < x$
[-∞, a]	en donde	$-\infty < x \leq a$	o sea $a > x$
[-∞, ∞]	en donde	$-\infty < x < \infty$	o sea x valor real

Fijada sobre una recta r (figura I.3) un punto origen 0 y puntos simétricos respecto de él tales como:

a , -a ; b , -b ; c , -c ; . . .

de una variable x que tome diferentes valores que satisfagan cualesquiera de las desigualdades siguientes:

$$-a \leq x \leq a$$
$$-b \leq x \leq b$$
$$-c \leq x < c$$
$$. . . . . .$$

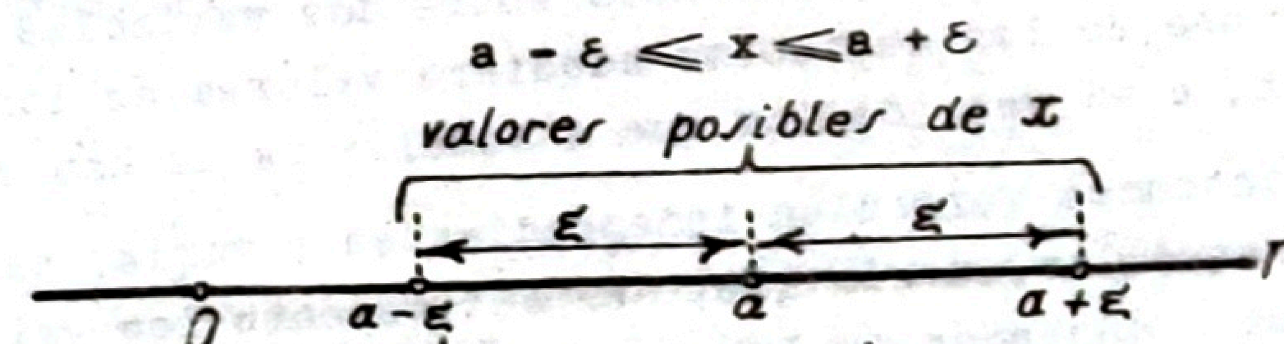


- figura I.3. -

permiten definir, respectivamente los intervalos simétricos (-a , a); (-b , b) y (-c , c), siempre que $x \leq a$; $x < b$; $x \leq c$.

Finalmente, en una recta r fijado un punto origen 0, llamaremos entorno de un punto a y de semiamplitud ε de una variable x (figura I.4), al conjunto de valores de la variable considerada, determinados por la relación: $x - a \leq \varepsilon$ y que satisfacen la desigualdad:

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$



- figura I.4. -

I.3.- Valor absoluto.- Valor absoluto, valor numérico o módulo de un número real a, es el número real considerado con signo positivo. Simbólicamente hemos de indicar al valor absoluto con la siguiente notación:

$$/ +a / = a \qquad ; \qquad / -a / = a$$

de donde deducimos que dos números opuestos o simétricos tienen igual valor absoluto.

Para el valor absoluto se cumplen los siguientes postulados:

a) El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de los valores absolutos de estos números, según que los mismos tengan signos distintos o iguales, respectivamente. Es decir que si a y b son dos números reales tendremos:

$$/ a + b / \leq / a / + / b /$$

b) El valor absoluto de la suma de dos números reales es mayor o igual que la diferencia de los valores absolutos de estos números, según que los mismos tengan signos iguales o distintos, respectivamente; o sea:

$$|a+b| \geq |a| - |b|$$

c) El valor absolutos del producto o cociente de dos números reales es respectivamente igual al producto o cociente de los valores absolutos de tales números. Luego:

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$$

I.4.- Relación de dependencia entre dos variables. Noción de función.

Dos variables cualesquieras, x e y, pueden vincularse de modo tal, que los valores asignados a una de ellas, y, dependen de los adquiridos por la otra, x. Tal es lo que sucede en la expresión:

$$y = mx + n$$

ecuación general de la expresión:

$$y = 4x - 5 \qquad (1)$$

donde, asignados a x los valores:

$$\ldots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots$$

resultan para y los valores:

$$\ldots ; -13 ; -9 ; -5 ; -1 ; 3 ; 7 ; 11 ; \ldots$$

Esta sencilla relación de dependencia entre dos variables permite observar que, cuando una de las variables adquiere valores arbitrarios, los de la otra dependen, a su vez, de los que a aquella se le han dado.

Distinguimos entonces variables independientes y variables dependientes o funciones de aquéllas, según que, respectivamente los valores asignados sean arbitrarios o dependan de los dados a la otra. Así, en la expresión (1) es fácil deducir que x es la variable independiente mientras que y es variable dependiente o función de x.

Puede suceder que para cada valor asignado a la variable independiente no le corresponda un solo valor a la variable dependiente o función de aquélla, sino varios (dos o más). Tal es lo que sucede con la expresión:

$$y = \pm\sqrt{x}$$

donde a cada valor de x corresponden dos valores de y en virtud del doble signo que antecede al radical. En este caso, estamos ante la presencia de una función multiforme, y en particular biforme, pues dos son los valores obtenidos; en la expresión (1) tan solo lo estábamos de una función uniforme.

DIRITCHLET, en 1854, sintetizó las observaciones anotadas al definir el concepto de función, diciendo: se dice que una variable y es función de otra variable x, cuando a cada valor de x (dentro de un cierto conjunto X llamado campo de variación de x) corresponde un valor determinado de y (función uniforme), o varios valores de y (función multiforme).

Simbólicamente expresamos que la variable y es función de la variable x mediante la relación:

$$y = f(x)$$

donde la notación f( ) se lee: "efe de o función de ". El símbolo f, que se llama característica, sintetiza las operaciones que hay que hacer con las constantes de la expresión de que se trate y el valor particular asignado a la variable independiente, lo cual, permite obtener, el o los respectivos valores de la función. Así, por ejemplo, en la expresión:

$$y = f(x) = mx + n$$

a cada valor asignado a x hay que multiplicarlo por m y sumarle n para obtener y; entonces, si:

$x = -1$	resultará	$y = f(x) = -m + n$
$x = 0$	resultará	$y = f(x) = n$
$x = 1$	resultará	$y = f(x) = m + n$
$x = 2$	resultará	$y = f(x) = 2m + n$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
$x = m$	resultará	$y = f(x) = m^2 + n$
$x = n$	resultará	$y = f(x) = n(m+1)$

Análogamente, en la expresión:

$$y = f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

tendremos para:

$x = -2$	;	$y = f(x) = 7$
$x = -1$	;	$y = f(x) = 0$
$x = 0$	;	$y = f(x) = -1$
$x = 1$	;	$y = f(x) = 4$
$x = 2$	;	$y = f(x) = 15$

Generalizando: si y = f(x) se representa con f(a) el valor x = a.

Cuando en un mismo desarrollo aparecen dos o más funciones es frecuente utilizar características distintas. Así, por ejemplo, en un problema de intersección de rectas, refiriéndonos a las expresiones generales, escribiremos:

$$y = f(x) = m_1x + n_1$$

$$y = g(x) = m_2x + n_2$$

Estas nociones constituyen la base de la TEORIA DE FUNCIONES, cuyos estudios adquieren capital importancia a partir del siglo XVII.

El concepto de función es muy amplio porque no solo se circunscribe su empleo a desarrollos analíticos sino geométricos, trigonométricos, físicos, químicos y, modernamente, también biológicos. En efecto: la expresión:

$$A = f(r) = 4\pi r^2 \qquad (2)$$

nos expresa el área A de un círculo de radio r, en función de éste y es un proceso de carácter típicamente geométrico. Igualmente, la expresión:

$$y = f(x) = \text{arc sen } x \qquad (3)$$

expresa el valor de un ángulo y en función de su arco seno x; constituye un proceso trigonométrico. Análogamente, la expresión:

$$s = f(t) = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (4)$$

donde v_0 y g son constantes, representa el espacio s recorrido por una partícula que cae libremente en el espacio en función del tiempo t transcurrido; expresa un fenómeno físico. En forma semejante, la expresión:

$$V = f(p) = \frac{k}{p} \qquad (5)$$

siendo k constante, expresa el volumen V de una masa de gas en función de la presión p; constituye un proceso químico. Finalmente, la expresión:

$$c = f(q) = c_0 + \lambda q \qquad (6)$$

expresa la concentración c de la sustancia de una célula en la mitad de la distancia entre la periferia y el centro, en función de la velocidad media q de esa sustancia, siendo c_0 y λ constantes que, respectivamente, expresan la concentración de la sustancia estudiada en el medio externo próximo a la célula y la resistencia ofrecida al flujo difusional por los medios externo e interno y por la membrana celular; constituye un proceso biológico.

En general, la relación de dependencia entre dos variables es indistinta. Con ello queremos significar que si la variable y es función de x, también podrá considerarse a ésta como función de aquélla. En términos, si:

$y = f(x)$ también podrá ser $x = g(y)$

y así entonces tendremos que, en la expresión:

$$y = f(x) = mx + n$$

resultará:

$$x = g(y) = \frac{y - n}{m}$$

y en las expresiones (2), (3), (4), (5), (6), respectivamente:

$$r = g(A) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\gamma}}$$

$$x = g(y) = \text{sen } y$$

$$t = g(s) = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gs}}{g}$$

$$p = g(V) = \frac{k}{V}$$

$$q = g(c) = \frac{c - c_0}{\lambda}$$

despejando r, x, t, p, q, respectivamente. Ello no obstante, la excepción a esta reciprocidad, en la relación de dependencia entre dos variables, viene dada cuando la función se iguala a una constante, es decir, cuando para cada valor asignado a la variable independiente le corresponde el mismo valor para la función, o sea que, si:

$$y = f(x) = \text{constante}$$

podremos seguir hablando de $y = f(x)$ pero ya no será cierta la relación: $x = g(y)$.

Frecuentemente también se utiliza una notación muy práctica para expresar la relación de dependencia entre dos variables ya que tiene la ventaja de no establecer expresamente cual es la variable independiente y cual es la función. Recibe el nombre de forma implícita de la función y se simboliza mediante la notación $F(x, y) = 0$, siendo requisito indispensable establecer esta igualdad. Así, por ejemplo, dada la ecuación:

$$3x + 4y - 2 = 8$$

la correspondiente función implícita es:

$$F(x, y) = 3x + 4y - 10 = 0$$

donde podrá calcularse tanto a $y = f(x)$ como a $x = g(y)$. La elección de la variable independiente deberá hacerse tomando en cuenta la finalidad del proceso y la mayor simplicidad del cálculo a realizar; ella depende de las circunstancias especiales de cada proceso.

I.5.- Clasificación de funciones.- Existen diferentes tipos de funciones. Por tal motivo se ha pensado sistematizar su estudio clasificándolos.

De la definición de función expuesta por DIRITCHLET inducimos una clasificación de funciones en uniformes y multiformes.

Función uniforme es aquella a quien le corresponde un valor por cada valor asignado a la variable independiente. Por ejemplo, la función:

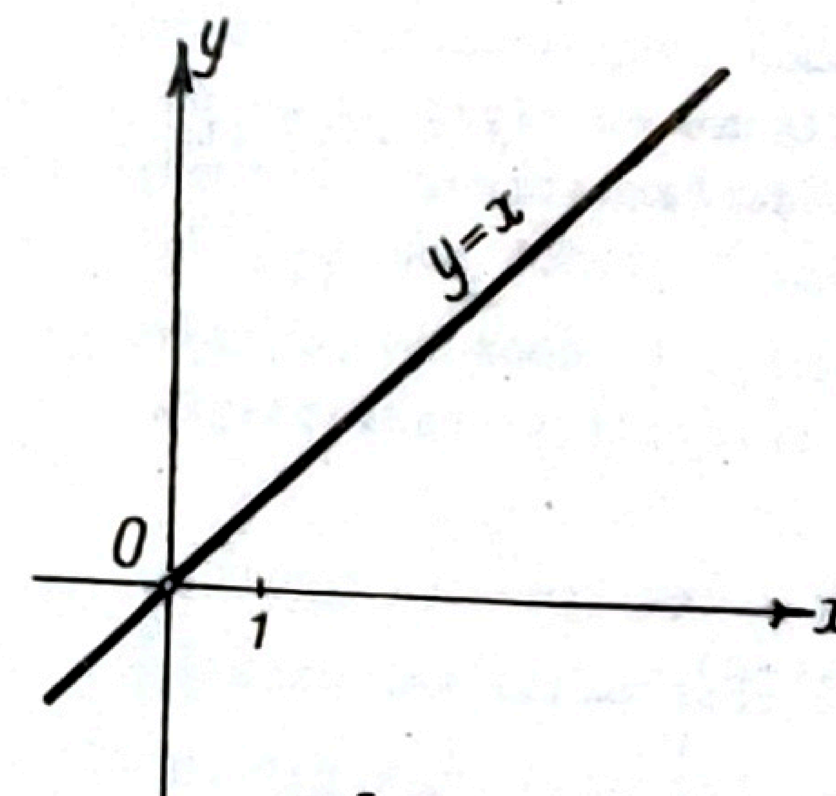
$$y = f(x) = x$$

que gráficamente representa una recta bisectriz del primer y tercer cuadrante (figura I.5-a) es uniforme.

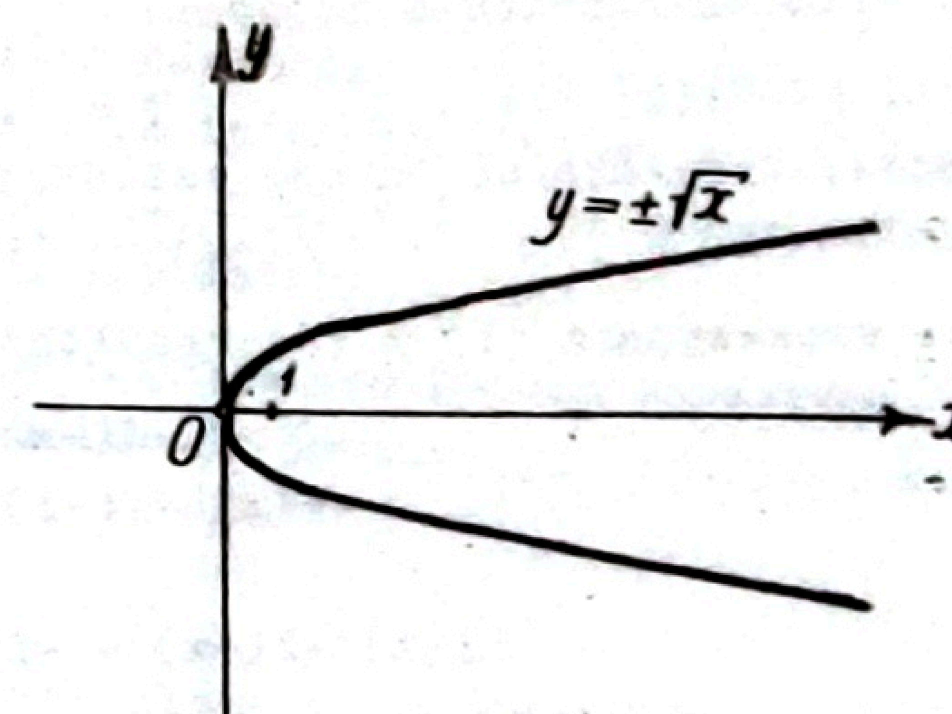
Función multiforme es aquella a quien le corresponden dos o más valores por cada valor asignado a la variable independiente. Así, por ejemplo, la relación:

$$y = f(x) = \pm\sqrt{x}$$

cuya representación gráfica es una parábola (figura I.5-b) es multiforme.



- a -



- b -

- figura I.5. -

Las funciones multiformes, específicamente se llaman biformes cuando dos son los valores que ella recibe. Para tres o más valores no existe denominación especial sino tan solo la genérica.

También las funciones se clasifican en pares o impares.

En la función par resultan valores idénticos para valores opuestos de la variable independiente. La expresión:

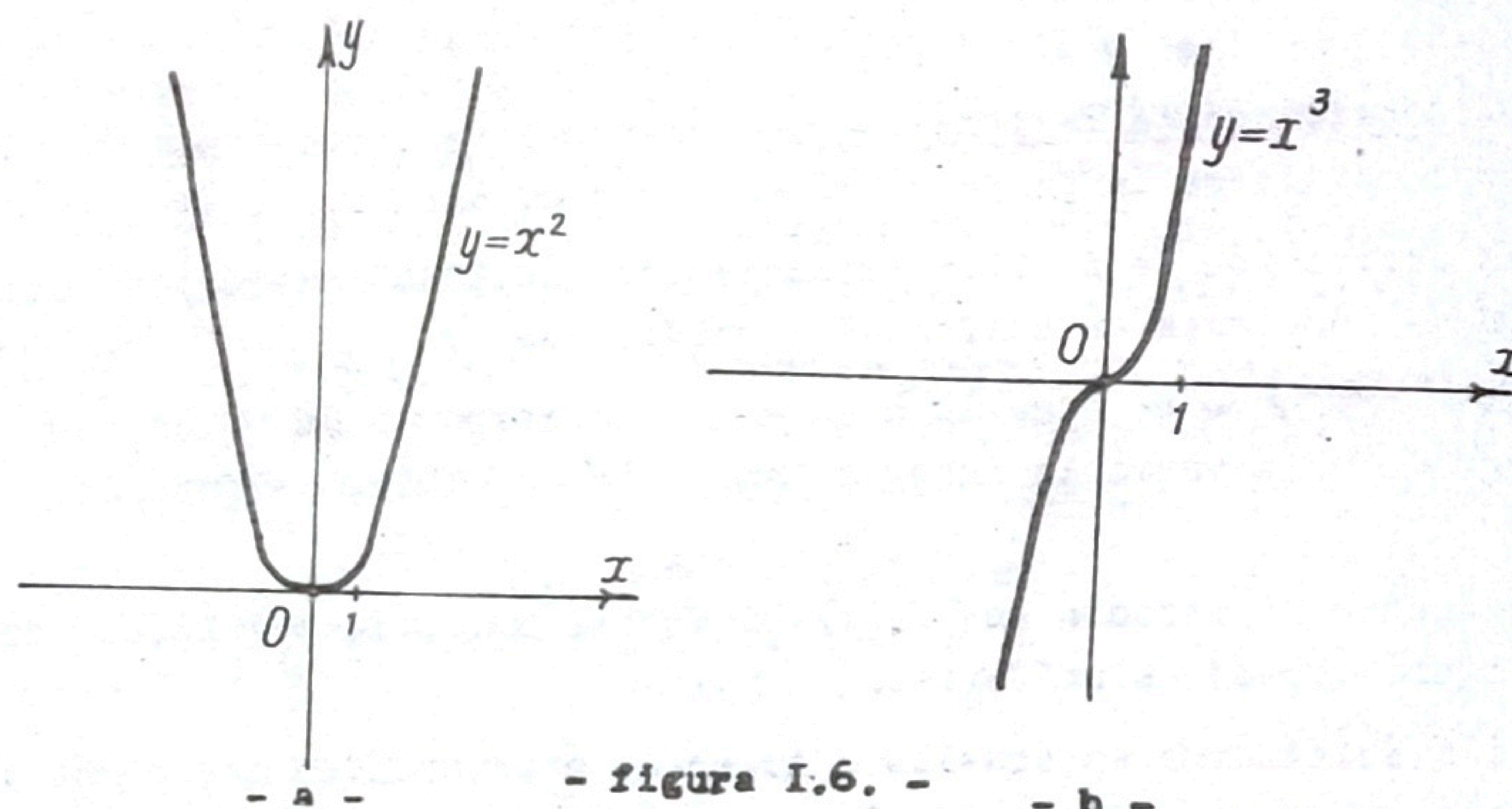
$$y = f(x) = x^2$$

cuya representación gráfica también es una parábola (figura I.6-a), es una función par. Lo mismo ocurre con la función

$$y = f(x) = \cos x$$

y, en general, con toda función que satisfaga la igualdad

$$f(-x) = f(x) \qquad (1)$$



- a - - figura I.6. - - b -

Función impar es aquella en donde se obtienen valores opuestos para valores también opuestos de su variable independiente. Por ejemplo, la relación:

$$y = f(x) = x^3$$

cuya representación gráfica la apreciamos en la figura I.6-b., es una función impar. Son también funciones impares:

$$y = f(x) = \text{sen } x \quad ; \quad y = f(x) = \text{tg } x \quad ; \quad y = f(x) \text{ ctg } x$$

y, en general, toda expresión que satisfaga la igualdad:

$$f(-x) = -f(x) \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) resulta:

$$f(x) - f(-x) = 0$$
$$-f(x) - f(-x) = 0$$

o sea:

luego:

$$f(x) - f(-x) = -f(x) - f(-x)$$

multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$\left[f(x) + f(-x)\right] + \left[f(x) - f(-x)\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\tfrac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] + \tfrac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right] = 0$$

simplificando y agrupando:

$$f(x) = 0 \qquad (4)$$

finalmente, igualando (3) y (4)

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] + \tfrac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]$$

o sea que toda función es igual a la suma de una función par e impar.

Las funciones pueden ser algebraicas o trascendentes.

Función algebraica es aquella que satisface una ecuación de la forma:

$$P_o(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + P_2(x)y^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0 \qquad (5)$$

donde $P_o(x)$ es un polinomio gradientemente ordenado en x. Así, la expresión:

$$ax + by + c = 0$$

representa una función algebraica.

La ecuación (5) es una función expresada en forma implícita y es susceptible de ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x^2 + a_n x + a_{n+1}$$

en este caso, estamos ante la presencia de una función algebraica explícita que se ha obtenido realizando sobre su variable independiente únicamente operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división) y de radicación en número finito de veces. Así, por ejemplo, la función:

$$y = f(x) = x^2\sqrt{x^2-1}$$

es una función algebraica explícita. En efecto: es reducible a la forma:

$$y^2 - x^4(x^2 - 1) = 0$$

o sea:

$$P_o(x)y^2 + P_1(x)y + P_2(x) = 0$$

donde:

$$P_o(x) = 1 \;;\; P_1(x) = 0 \;;\; P_2(x) = x^4 - x^6$$

que es su forma implícita.

Observamos entonces que: toda función algebraica dada en forma implícita cuando es susceptible de ser llevada a la forma explícita, o viceversa, con solo efectuar operaciones racionales y de radicación en número finito de veces, constituye una función algebraica explícita.

Sin embargo, no todas las funciones algebraicas pueden expresarse como funciones algebraicas explícitas; tal es lo que sucede, por ejemplo, con la función:

$$y^7 - xy^2 + 7 = 0$$

a tales funciones las llamaremos funciones algebraicas implícitas.

En la presente publicación solo estudiaremos las funciones algebraicas explícitas a quienes, para simplificar, simplemente llamaremos funciones algebraicas, salvo que específicamente no se indique lo contrario.

Inmediatamente inducimos que las funciones algebraicas, tanto explícitas como implícitas, tienen grado. Se llama grado de una función algebraica, monomio o polinomio, al mayor exponente que afecta su variable independiente. Tendremos entonces funciones de primero, segundo, tercero, ..., n-simo grado, según que el mayor exponente de su variable independiente valga 1, 2, 3, ..., n.-

En particular las funciones de primero, segundo, tercero y cuarto grado, respectivamente se denominan también funciones lineales, cuadráticas o cuádricas, cúbicas y cuárticas.

Las funciones que no son algebraicas se llaman trascendentes. Tal es lo que sucede con las expresiones:

$$y = f(x) = a^x \quad ; \quad y = f(x) = \log_a x \quad ; \quad y = f(x) = \operatorname{sen} x$$

Por su parte, las funciones algebraicas son susceptibles de clasificaciones. Distinguimos:

a) funciones algebraicas racionales o irracionales. Función algebraica racional es aquella que tiene su variable independiente sometida únicamente a operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencias de exponente entero). En la función algebraica irracional a la variable independiente se la somete a operaciones de suma,-resta, multiplicación, división y elevación a potencias de exponente - fraccionario. Entonces, mientras las expresiones:

$$y = f(x) = 3x - 5 \quad ; \quad y = f(x) = \frac{5}{3}x^2 - \frac{9}{8}x + 3$$

$$y = f(x) = \frac{x}{x+1} \quad ; \quad y = f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x - 1}$$

son funciones algebraicas racionales, contrariamente las relaciones:

$$y = f(x) = \pm\sqrt{x} \quad ; \quad y = f(x) = x^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad y = f(x) = \frac{\sqrt{x(x-7)}}{x + \frac{1}{4}}$$

son funciones algebraicas irracionales.

b) funciones algebraicas racionales o irracionales, enteras o fraccionarias. Función algebraica racional o irracional entera, es aquella cuya variable independiente no figura en el denominador. Tal es lo que sucede con las expresiones:

$$y = f(x) = 3x - \frac{5}{4}$$

$$y = f(x) = \frac{7}{3}x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 6$$

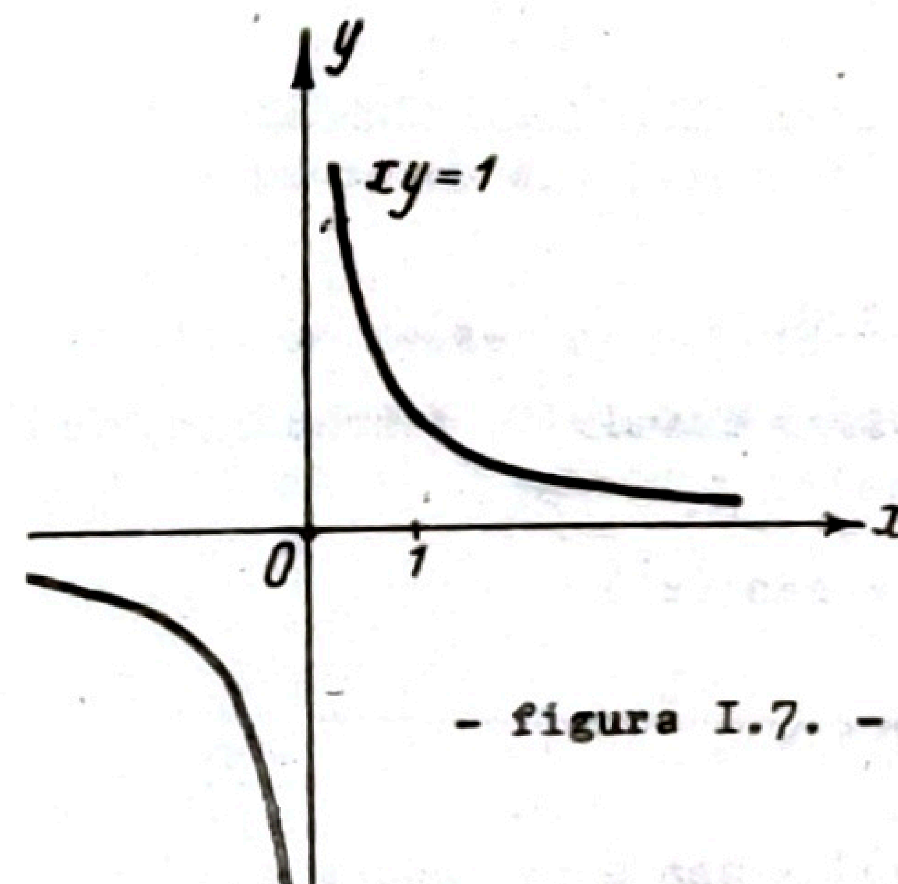
$$y = f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)(x-2)}}{5}(x+7)$$

Contrariamente, función algebraica racional o irracional fraccionaria,- es aquella cuya variable independiente figura en el denominador. Tal es lo que sucede con la expresión:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

cuya representación gráfica la apreciamos en la figura I.7., y también con las relaciones:

$$y = f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} \quad ; \quad y = f(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{x^2 - 5x + 6}}$$



- figura I.7. -

Cuando la relación de dependencia entre las funciones y las variables independientes se expresa a través de una tercer variable, las funciones son paramétricas. Esta última variable recibe el nombre de parámetro y habitualmente se simboliza con la letra t. Así entonces las relaciones:

$$\begin{cases} y = f(t) = 1 - 2t \\ x = g(t) = 2t^2 \end{cases}$$

expresan una función paramétrica.

Funciones inversas son aquellas que tienen sus variables permutadas. Así, por ejemplo, la función logarítmica es la inversa de la función exponencial. En efecto:

$$(1) \qquad y = f(x) \log_a x \quad ; \quad y = g(x) = a^x \qquad (2)$$

aplicando logaritmos en la expresión (2), resulta:

$$\log_a y = x \cdot \log_a a$$

pero como:

$$\log_a a = 1$$

resulta:

$$\log_a y = x$$

e intercambiando las variables resulta:

$$y = f(x) = \log_a x$$

expresión concordante con (1). Las representaciones gráficas de la función logarítmica y la exponencial respectivamente las exponemos en la figura I. 8-a y b.

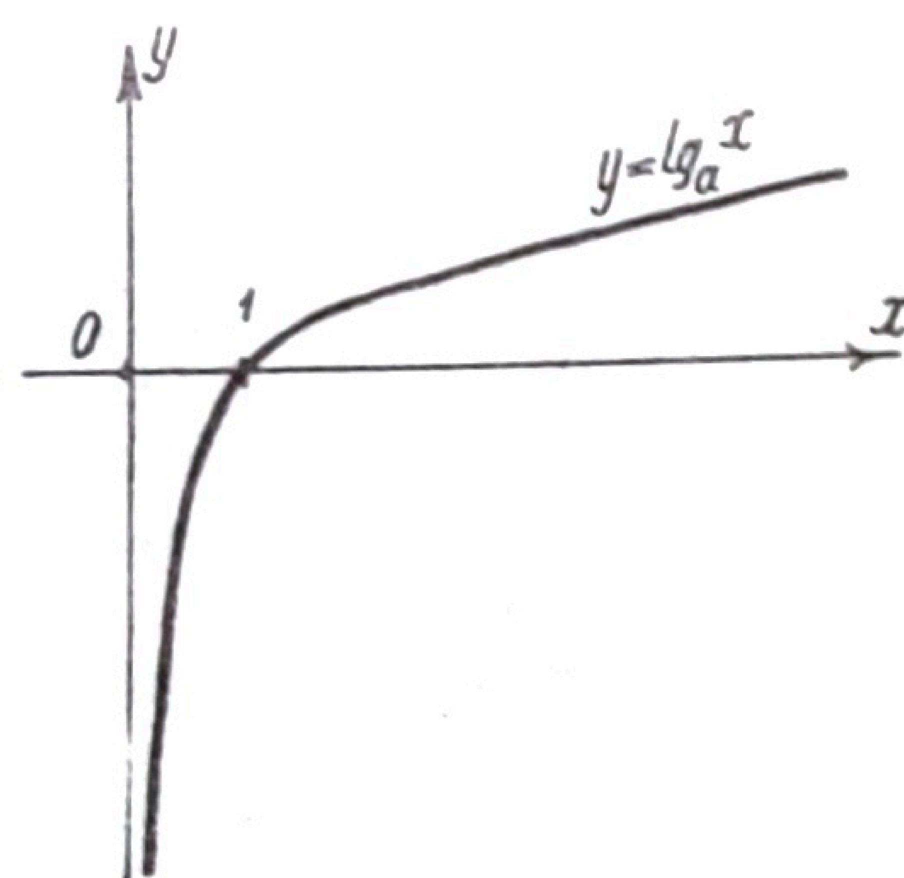
La relación de dependencia entre dos variables puede expresarse tam - bién a través de una segunda función auxiliar. Así, por ejemplo, si tenemos las funciones:

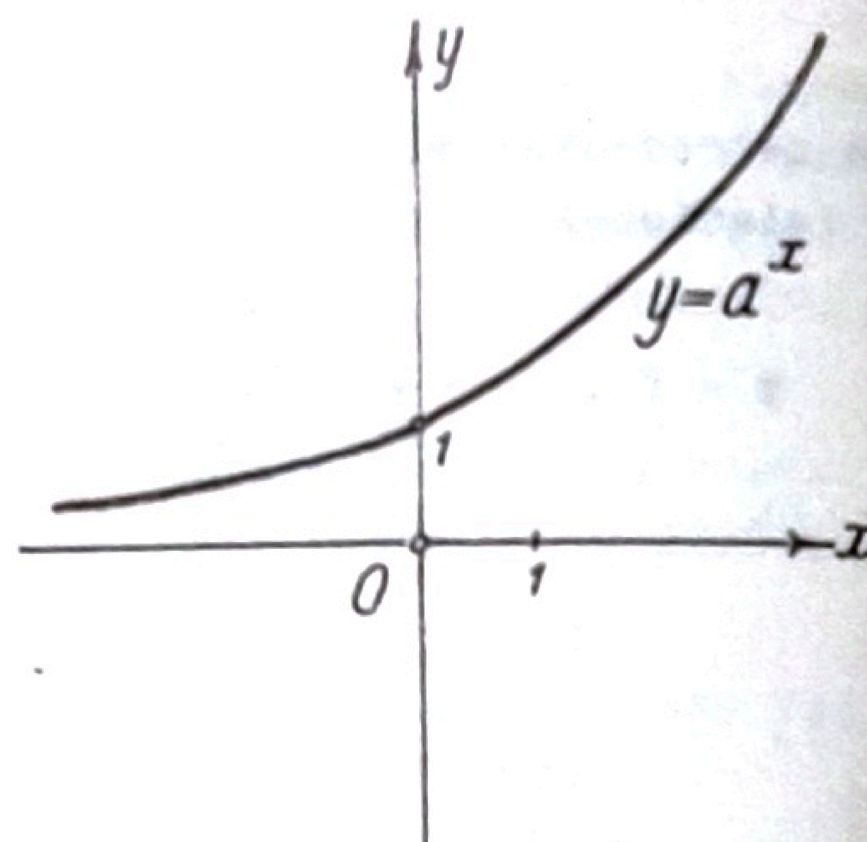
$$y = f(u) \quad ; \quad u = g(x)$$

podremos escribir:

$$y = f[g(x)]$$

lo que nos indica que y es función de función de x; o sea que para cada valor de x tendremos valor o valores de u, y para cada valor de u valor o valores de y.





- a - - figura I.8. - - b -

Esta relación de dependencia se aplica cuando se descomponen funciones complicadas. Sea:

$$y = f(x) = \text{sen}\ (x^3)$$

haciendo:

$$x^3 = g(u) = u$$

tendremos:

$$y = f\left[g(u)\right] = \text{sen}\ u$$

CAPITULO II

SISTEMAS DE REPRESENTACION

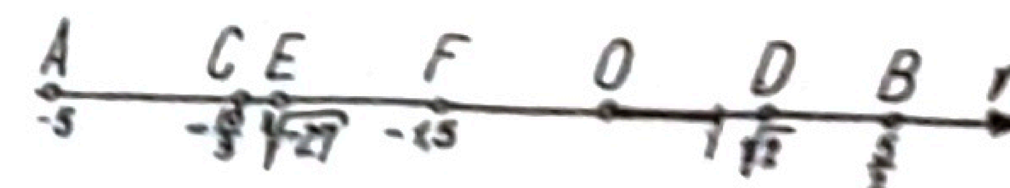
II.1.- Representación gráfica de números reales.- La mayoría de los desarrollos y procesos analíticos se representan en forma geométrica o gráfica.

Los números reales se representan mediante puntos de un eje r, entendiendo por tal, toda recta sobre la que se fija un punto origen O, un sentido y una unidad de longitud o referencia u (figura II.1).-



- figura II.1. -

En efecto: en estas condiciones, todo número real que se tome como medida de un cierto segmento sobre un eje r de acuerdo a la unidad u prefijada y a partir de su origen O, determinará la posición de un punto. Recíprocamente, a cada punto del eje r le corresponderá un número real que nos indicará la longitud del segmento que lo vincula al origen O. Por ejemplo, para representar el número 4 sobre el eje r, fijados el origen O, el sentido positivo mediante la flecha -hacia la derecha de O- y la unidad de longitud u, bastará tomar sobre el mismo el segmento $\overline{OP} = 4.u$; o sea que el punto P geométricamente representará al número real dado. Inversamente, dado un punto P sobre un eje r para saber que número real le corresponde no habrá más que medir la longitud del segmento $\overline{OP}$ que lo vincula al origen O de acuerdo a la unidad u. En nuestro caso, el segmento $\overline{OP}$ la ha de contener 4 veces.(figura II.1).



- figura II.2. -

Podemos apreciar entonces que entre los números reales y los puntos de un eje es posible establecer una correspondencia biunívoca, lo que conduce a sintetizar que: a cada número real le corresponde un punto de un eje, y viceversa, a cada punto de un eje le corresponde un número real.

En general, dado el número real n su representación gráfica la haremos considerando $\overline{OP} = n.u$, siendo P un punto genérico sobre el eje r.

EJEMPLO: mediante los puntos A, B, C, D, E y F, respectivamente se ha representado sobre un eje r los números -5, $\frac{5}{2}$, $-\frac{10}{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-27}$, $-1{,}5$ (figura II.2).-

EJERCICIOS: a) Representar sobre un eje r mediante puntos los números reales $\sqrt{4}$; $-\sqrt{6}$; $\frac{20}{6}$; -4,; ; 0,5 y $\sqrt[3]{-8}$.

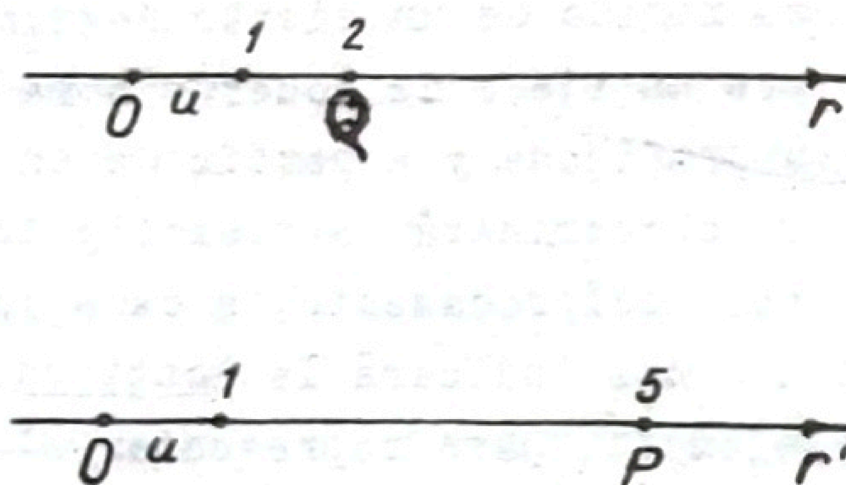
b) Idem a): 4^2; $\frac{5}{2}^{3}$; $-\sqrt[3]{-1000}$; $100^{\frac{1}{2}}$; $(2^2)^3$, haciendo u = 10.

c)¿Es posible representar sobre un eje r mediante un punto el número $\sqrt{-4}$? ¿Por qué?¿ $\sqrt[3]{-125}$?¿Por qué?

d)¿La expresión $\frac{3}{0}$ es posible representarla sobre un eje r?¿Por qué?

e)¿Las expresiones $\frac{0}{3}$ y $0^{\frac{1}{2}}$ pueden representarse sobre un eje r?¿Por qué?

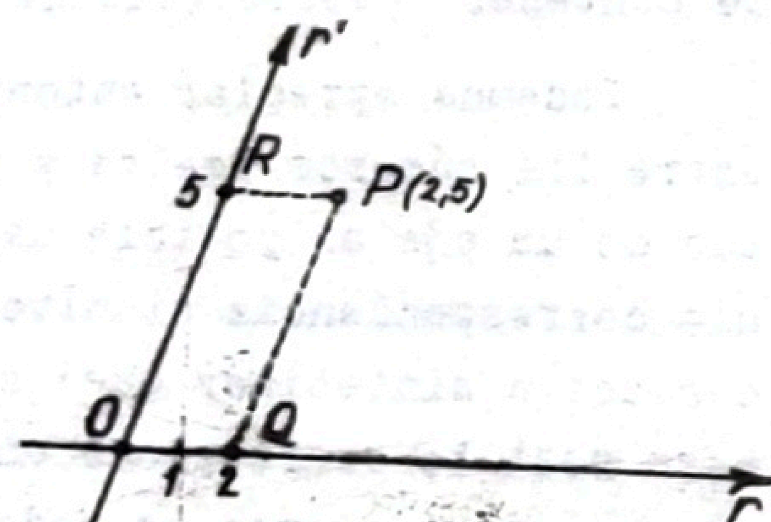
II.2.- <u>Sistema de coordenadas cartesianas.</u>- El problema inmediato a resolver es el de representar gráficamente un par ordenado de valores numéricos, x e y, pertenecientes a una cierta función. Su resolución es inmediata, pues, de acuerdo a lo dicho en el parágrafo II.1., los representaremos por un par de puntos Q y P respectivamente situados sobre dos ejes r y r'. Así, por ejemplo, para representar geométricamente un par de valores reales cualesquieras (2 , 5), considerando sobre los ejes r y r' los segmentos $\overline{OQ}$ = 2u y $\overline{OP}$ = 5u, respectivamente fijaremos los puntos Q y P representativos del par de valores dados.(figura II.3).-



- figura II.3. -

Mucho más intuitiva y práctica resulta la representación geométrica del par ordenado de valores numéricos dados en un sistema de coordenadas cartesianas mediante un punto de un plano tomando como referencia a los ejes r y r', pero ahora dispuestos en forma tal como lo indica la figura II.4., es decir con el punto origen O, común para ambos, determinado por su intersección.

De esta manera, tomando sobre el eje r dos unidades,determinamos el punto Q; análogamente,llevando sobre el eje r' cinco unidades,determinamos el punto R; finalmente, trazando por Q y R paralelas a r y r', en su intersección determinamos el punto P que cumple con las condiciones propuestas, pues, el segmento $\overline{OQ}$ representa uno de los números reales del par ordenado , el 2, en tanto que $\overline{OR}$ = $\overline{QP}$ representa el otro, el 5.



- figura II.4. -

Inversamente, si se desea calcular la posición de un punto referido a un sistema de ejes r y r', trazando por aquél respectivas paralelas a los ejes determinaremos los puntos Q y R que, vinculados al origen O del sistema permiten obtener los segmentos $\overline{OQ}$ y $\overline{OR}$ cuya medida de acuerdo con la referencia u nos hace posible hallar un par ordenado de números reales.

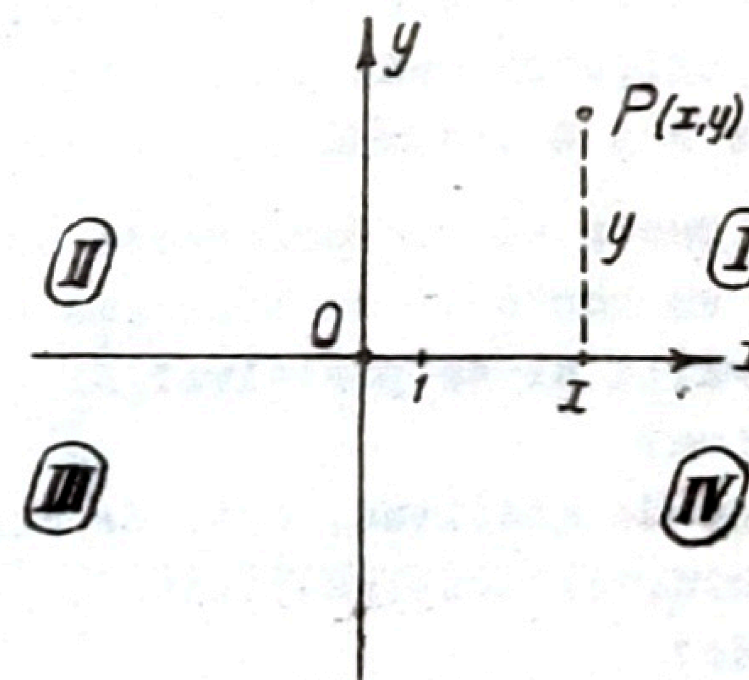
Nuevamente estamos ante una correspondencia biunívoca porque a cada par ordenado de números reales le corresponde un punto de un plano,y viceversa, a cada punto de un plano le corresponde un par ordenado de números reales.

El valor OQ se denomina abscisa del punto P y habitualmente se simboliza con la letra x; el valor $\overline{OR}$ = $\overline{QP}$ se denomina ordenada del punto P y habitualmente se simboliza con la letra y. El eje donde se refieren las abscisas toma su nombre y se lo simboliza con la letra x y aquél donde se refieren las ordenadas se denomina eje de ordenadas indicándosele con la letra y. En conjunto, los ejes se denominan ejes coordenados y al plano que los contiene plano coordenado.

El punto origen de ambos ejes se indica con la letra O y convencionalmente se ha acordado en indicar los sentidos positivos mediante flechas y hacia la derecha o arriba del origen según sean los ejes de abscisas u ordenadas respectivamente. Los ejes pueden tener unidades de longitud iguales o distintas; la elección depende de las circunstancias del caso.

Para indicar las coordenadas cartesianas de un punto genérico P se utiliza la notación P(x , y) que pone de manifiesto la vinculación existente entre el punto considerado y el par ordenado de números reales. Esta notación en el caso de la figura II.4 se traduce en la correspondiente P(2 , 5).

Es fácil comprender entonces que los puntos situados sobre el eje de abscisas tienen ordenada nula y los que están sobre el eje de ordenadas tienen abscisa nula. También son nulas las coordenadas del punto origen O (o , o).



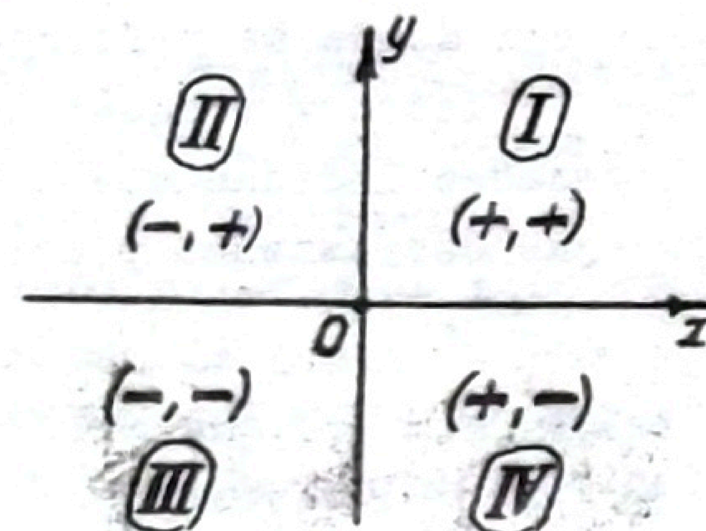
- figura II.5. -

Si bien no es condición indispensable, resulta sumamente práctico y usual considerar los ejes coordenados perpendiculares entre sí.En este caso el sistema de coordenadas cartesianas recibe el nombre de ortogonal, subsistiendo las convenciones establecidas. La representación de un punto P es la indicada en la figura II.5.-

En lo sucesivo al referirnos a sistemas de coordenadas cartesianas utilizaremos el ortogonal, salvo que específicamente no indiquemos lo contrario.

Ello no obstante, cualquiera sea el sistema de coordenadas cartesianas empleado los ejes coordenados dividen al plano coordenado en cuatro regiones llamadas cuadrantes y que se numeran como lo indican las figuras II.5 y 6.-

Así entonces los puntos situados en el primer cuadrante (I), tienen abscisa y ordenada positiva; para el segundo cuadrante (II) aquélla resulta negativa y ésta positiva; en el tercer cuadrante (III) ambas son negativas y, finalmente, en el cuarto cuadrante (IV) obtiénense abscisas positivas y ordenadas negativas. Vemos entonces que para cuadrantes opuestos - I, III y II, IV- los signos son opuestos.

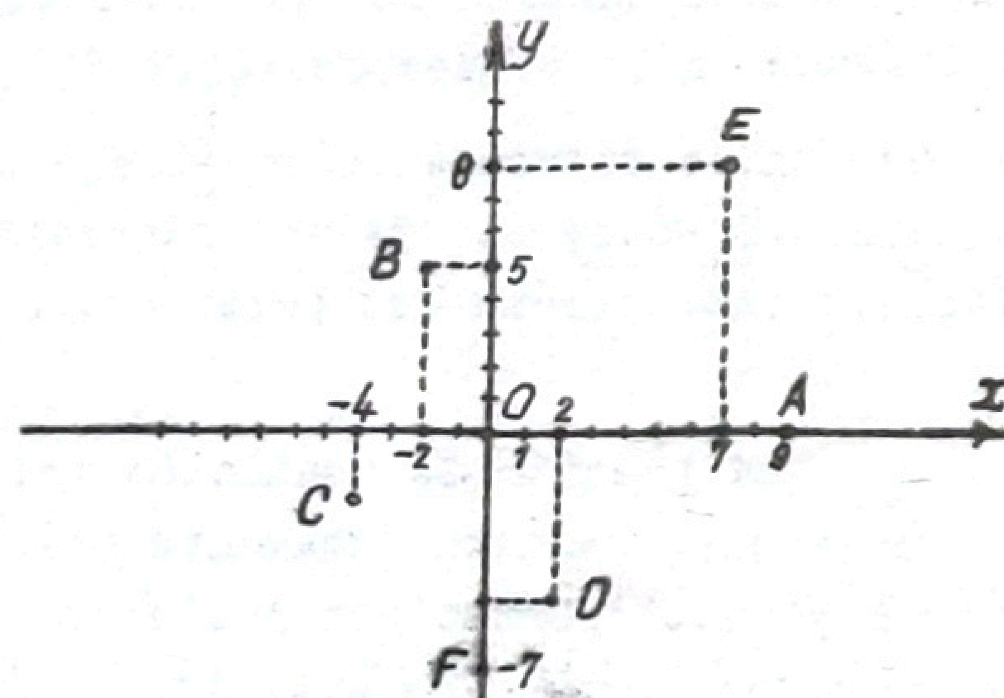


- figura II.6. -

La operación de fijar un punto en el plano coordenado se llama trazado y resulta práctico emplear papel milimetrado y unidades de medida apropiadas a las circunstancias de cada caso.

Se comprende que todas las convenciones establecidas regirán para el futuro, a no ser que específicamente indiquemos lo contrario.

EJEMPLO: A continuación hemos trazado en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales los siguientes puntos: A(9 , 0), B(-2 , 5), C(-4 , -2), D(2 , -5), E(7 , 8) y F(0 , -7).(figura II.7).-



- figura II.7. -

EJERCICIOS: a) Ubicar en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales los siguientes puntos: A (6 , 2); B(7 , -5); C(3 , 0); D(-7 , -5) E(-6 , 2); F(-5 , 0); G($\sqrt{3}$, 2) y H (-1 , $\sqrt{5}$) diciendo previamente, antes del trazado, en que cuadrante ha de ubicarse cada punto. Unir los puntos B y D trazando una recta.

b) Decir en que cuadrante se hallará un punto si su ordenada es negativa.¿Y si es positiva?¿Si su abscisa es negativa?¿Y si su abscisa es positiva?

c) Si un punto se desplaza paralelo al eje de abscisas, cuál de sus ordenadas permanece constante?¿Si, en cambio, el desplazamiento es en el sentido del eje de ordenadas qué sucede?

d) Construir los siguientes triángulos:

1. A(3 , -3) ; B(7 , 8) : C(1 , -8).
2. A(4 , 0) ; B(0 , 4) ; C(-3 , -5).
3. A($\sqrt{6}$, 2) ; B(5 , 7) ; C(0 , -3).

e) Un cuadrado cuyo lado es 2a tiene su centro en el punto O_1(3 , 3) y sus lados una orientación paralela a las bisectrices de los ejes coordenados.¿Cuáles serán las coordenadas de los vértices?

R : A(3 - a$\sqrt{2}$, 3) ; B(3 , 3 + a$\sqrt{2}$) ; C(3 + a$\sqrt{2}$, 3); D(3, 3 - a$\sqrt{2}$)

f) Hallar el punto de intersección de los segmentos de recta determinados por los puntos A_1(-5 , 8), B_1(7 , -1) y A_2(-7 , -7), B_2(14 , 12)

R : intersección I(3 , 2).

g) Un segmento de recta que une dos puntos está dividido por el origen que dando la tercera parte del segmento, del origen a uno de los extremos. Si las coordenadas de uno de los extremos es (a , b).¿Cuáles serán las coordenadas del otro extremo?

R : (-2a , -2b)

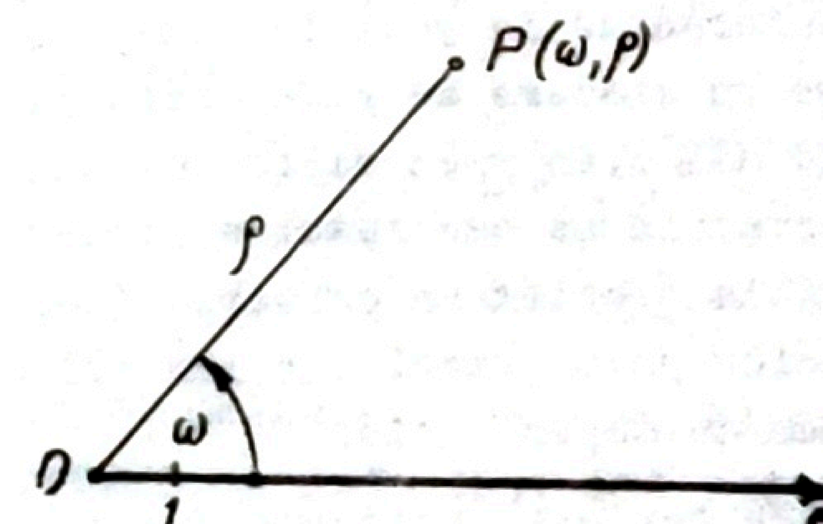
h) Un triángulo equilátero cuyo lado es a, tiene su base sobre el eje de las abscisas y el vértice opuesto por debajo de dicho eje.¿Cuáles serán las coordenadas de los vértices del triángulo, si el vértice izquierdo de la base se halla en el origen?

R ; (0 , 0) , (a , 0) , $\left[\frac{a}{2} , - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$

II.3.- Sistema de coordenadas polares.- El sistema de coordenadas cartesianas no es el único que se utiliza para determinar la posición de un punto en un plano mediante un par ordenado de valores numéricos, existen otros, y uno de los más frecuentemente utilizado es el sistema de coordenadas polares cuyos elementos de referencia son:

a) un punto fijo llamado polo que habitualmente se designa con la letra O;
b) una semirrecta, con origen en el polo, llamada eje polar, que se simboliza con la letra e y sobre la que se fija la unidad de longitud o referencia.

El plano que contiene estos elementos se llama plano polar.



- figura II.8. -

De esta manera, si se desean trazar las coordenadas polares de un punto genérico P, perteneciente al plano polar, resultará posible referirlo al origen O trazando un rayo que pase por ellos y determinando su posición mediante un par de valores numéricos: el ángulo ω formado por el rayo OP con el eje polar e y el número ρ que mide la distancia entre el polo y el punto dado de acuerdo con la unidad de medida previamente fijada.(figura II.8).-

El ángulo ω y el número ρ respectivamente se llaman argumento o abscisa angular y radio-vector o módulo. La notación empleada es P(ω , ρ) que se lee: "el punto P cuyas coordenadas polares son su argumento ω y módulo ρ .- También suele usarse P(ρ , ω).-

Hemos determinado así la posición de un punto mediante un par ordenado de números.

Recíprocamente, un par ordenado de números ω y ρ, referidos a un eje polar e y polo O determinan un punto del plano polar porque, mediante ω hallamos a partir de e un rayo sobre el cuál, midiendo desde O el valor de ρ, de acuerdo con la unidad fijada, es posible determinar el punto P buscado.(figura II.8).-

El polo O es el único punto que se vincula con un solo número: el radio-vector o módulo ρ que, en este caso, es nulo ($\rho = 0$).

Considerados ángulos congruentes y radio-vectores negativos a un punto $P(\omega, \rho)$ es posible indicarlo también mediante los siguientes pares de valores numéricos:

$$P(2k\pi + \omega, \rho) \quad ; \quad P(2k\pi + \omega, -\rho)$$

siendo k = 1, 2, 3, ...

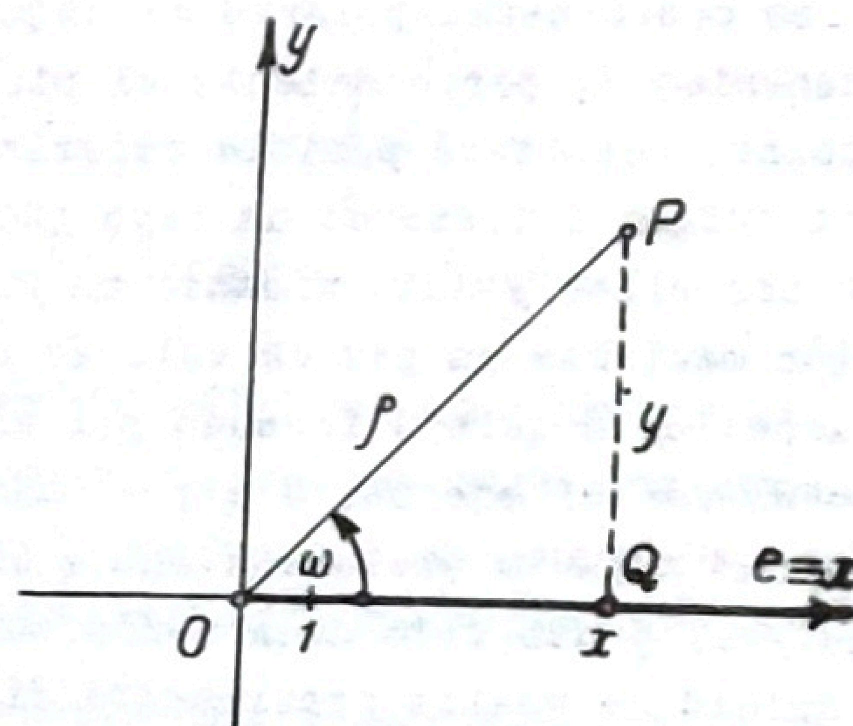
Ello no obstante y salvo indicación expresa en contrario utilizaremos al módulo $\rho > 0$ y argumento $0 \leq |\omega| \leq 2\pi$.-

II.4.- <u>Fórmulas de pasaje o transformación.-</u> Un punto genérico P queda referido a un sistema de coordenadas cartesianas o polares mediante pares ordenados de valores numéricos. Estos pares son diferentes entre sí, y según determinen la posición del punto dado en el sistema de coordenadas cartesianas o en el de coordenadas polares, respectivamente resultarán dos números reales, o un valor numérico angular, expresado en grados sexagesimales, centesimales o radianes, y un número real.

Por lo tanto, interesa conocer las fórmulas de pasaje o transformación que vinculan los pares de valores numéricos en ambos sistemas para un mismo punto P ya que dichos pares casi nunca son iguales.

Ante todo debemos establecer que los pares de valores numéricos dependerán de la posición que conserve un sistema de referencia respecto del otro y en virtud de tal observación es que resulta imprescindible adoptar un criterio de unificación para establecer las relaciones de dependencia.

Es por ello entonces que convendremos en que ambos sistemas tendrán su origen y polo coincidentes y que el eje polar coincidirá con el eje de abscisas.(figura II.9).-



- figura II.9. -

En tales condiciones, sea P un punto genérico dado por sus coordenadas cartesianas $P(x, y)$ y polares $P(\omega, \rho)$.Aplicando las definiciones de coseno y seno en el triángulo OQP rectángulo tendremos:

$$\cos\omega = \frac{x}{\rho} \quad ; \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{y}{\rho}$$

luego:

$$(2) \quad \boxed{x = \rho \cdot \cos\omega \quad ; \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\omega} \quad (2)$$

expresiones éstas que permiten calcular la abscisa y ordenada del punto dado conocidas sus coordenadas polares.

Aplicando la definición de tangente tenemos:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{y}{x} \quad \text{luego} \quad \boxed{\omega = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x}} \quad (3)$$

y mediante el teorema de PITAGORAS:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

o sea:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4)$$

expresiones, las (3) y (4), que facilitan el cálculo del módulo y argumento en función de su abscisa y ordenada.

De escasa utilidad son las expresiones:

$$\rho = \frac{x}{\cos\omega} \quad ; \quad \rho = \frac{y}{\operatorname{sen}\omega}$$

para el cálculo de ρ, conocidos x, ω e y, ω. También son poco frecuentes las relaciones:

$$\omega = \operatorname{arc}\cos\frac{x}{\rho}$$

$$\omega = \operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{y}{\rho}$$

para el cálculo de ω, conocidos x, ρ e y, ρ; menos utilizadas aún son las ecuaciones:

$$x = \sqrt{\rho^2 - y^2} \quad ; \quad y = \sqrt{\rho^2 - x^2}$$

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}\omega} \quad ; \quad y = x \cdot \operatorname{tg}\omega$$

para el cálculo de x e y. Es por eso, que las relaciones consignadas en las expresiones (1), (2), (3) y (4) adquieren el carácter de fundamentales, por ser las de mayor utilidad práctica.

EJEMPLOS: a) Hallar las coordenadas cartesianas ortogonales del punto $A(\frac{\pi}{4}, 5)$. Tendremos, por lo tanto:

$$\omega = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \rho = 5$$

y aplicando las fórmulas de transformación resultará:

$$x = \rho \cdot \cos\omega = 5 \cdot \cos 45^\circ = 5\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \rho \cdot \operatorname{sen}\omega = 5 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = 5\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

es decir que, en el sistema cartesianso, resulta $A(\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2})$.

b) En la figura II.10 hemos trazado en un sistema de coordenadas polares los siguientes puntos:

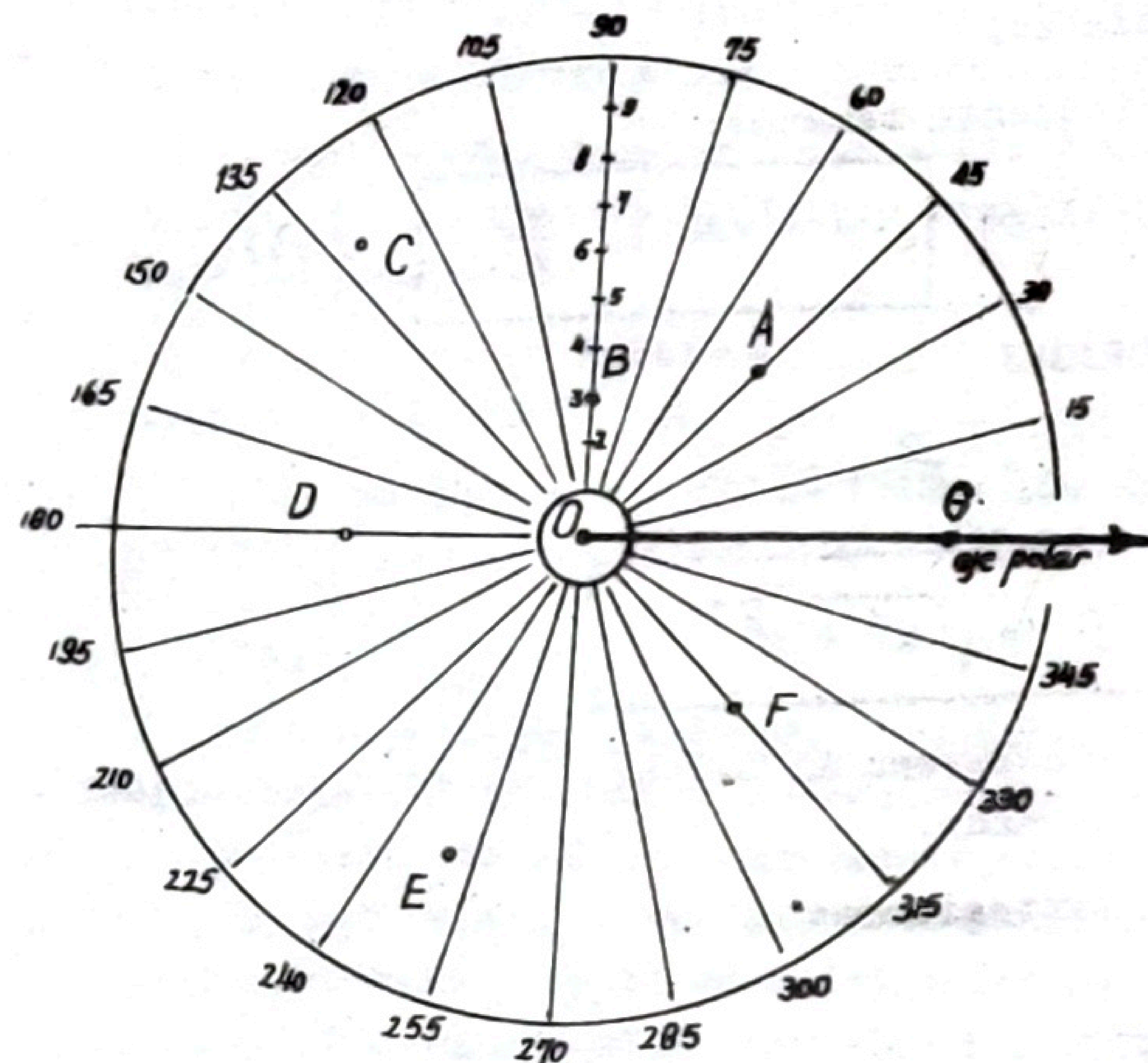
$A(\frac{\pi}{4}, 5)$; $B(\frac{\pi}{2}, 3)$; $C(130^\circ, 8)$; $D(\pi, 5)$;
$E(250^\circ, 7)$; $F(315^\circ, 6)$; $G(0, 8)$

c) Hallar las coordenadas polares del punto $B(5, -3)$.
Resulta: $x = 5$ e $y = -3$; en consecuencia es:

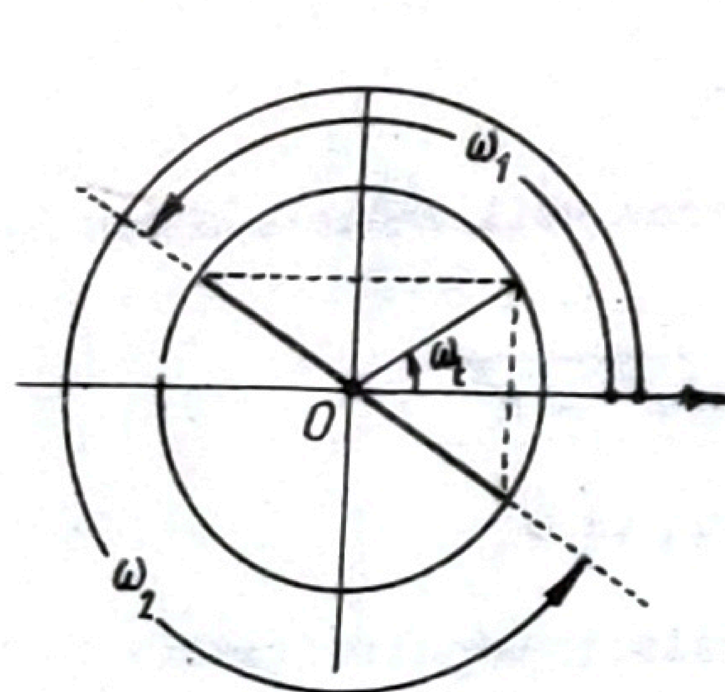
$$\omega = \text{arc tg}(-\frac{3}{5}) =$$
$$\omega = \text{arc tg}(-0{,}6) =$$
$$\omega_t = 30^\circ 57' 8''$$

$$\rho = \sqrt{5^2 + 3^2} \cong 5{,}83$$

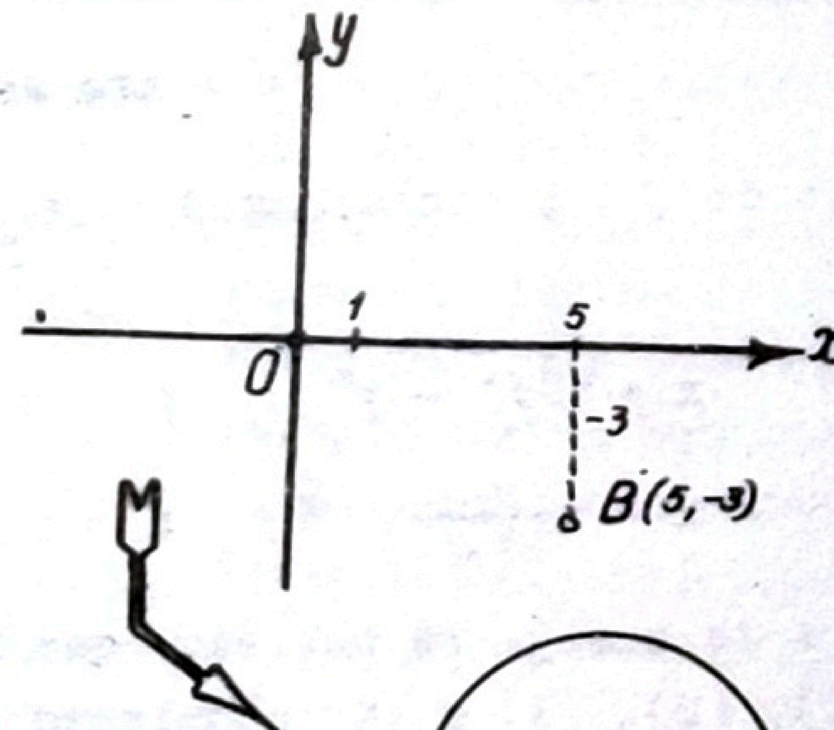
Ahora bien: existen dos valores de ω cuya tangente vale $-0{,}6$; ellos son: $\omega_1 = 149^\circ 02' 2''$ y $\omega_2 = 329^\circ 02' 2''$, como puede apreciarse en la figura II.11. Como el punto B, dato del problema, pertenece al cuarto cuadrante por tener su abscisa positiva y ordenada negativa el valor de ω_2 es el buscado. Luego: en el sistema de coordenadas polares es $B(329^\circ 02' 2''; 5{,}83)$.(figura II.12).



- figura II.10. -



- figura II.11. -



- figura II.12 -

EJERCICIOS: a) Fijar los puntos: $A(30^\circ, 2)$; $B(\frac{\pi}{4}, 4)$; $C(2\frac{\pi}{3}, 5)$; $D(\frac{\pi}{2}, -5)$; $E(138^\circ, \frac{5}{3})$; $F(6, 0)$; $G(328^\circ, 7)$.

b) Calcular las coordenadas cartesianas de los puntos $M(\frac{\pi}{2}, 4)$; $N(60^\circ, 1)$ $P(130^\circ, \frac{7}{2})$; $Q(\frac{3\pi}{4}, \frac{4}{3})$; $R(315^\circ, 3)$; $S(-20^\circ, 2)$ redondeando al centésimo los valores tabulares de senos y cosenos.

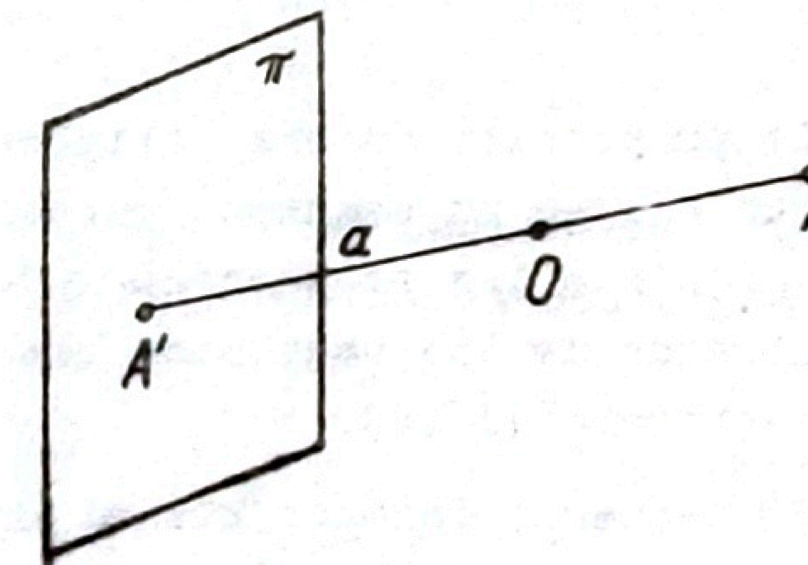
c) Calcular las coordenadas polares de los puntos: $A(2, 2)$; $B(5, -8)$; $C(-3, 1)$; $D(-5, 0)$; $E(0, -2)$; $F(3, -5)$; $G(0, 1)$; $H(\frac{2}{5}, 3)$.

II.5.- Teoría de Proyecciones - Nociones.- En este parágrafo explicaremos los principios fundamentales de la Teoría de Proyecciones cuyo desarrollo en forma detallada es objeto de estudio de la GEOMETRIA DESCRIPTIVA y ANALITICA, pero, por ser su aplicación de frecuente uso en los párrafos y capítulos siguientes conviene dar, aunque más no sea, someras nociones; por otra parte algunas de ellas serán seguramente conocidas ya por el lector.

Hasta ahora hemos resuelto el problema de correspondencia entre un punto y un par ordenado de valores numérico que, a su vez, hace posible la resolución de los dos problemas siguientes:
a) dado un punto del plano determinar sus coordenadas cartesianas;
b) dadas la abscisa y ordenada de un punto efectuar su trazado.

Los principios consagrados por la Teoría de Proyecciones se vinculan íntimamente con las relaciones métricas que pueden establecerse entre los puntos de un plano coordenado y es por tal motivo que se incluyen en el presente capítulo.

Para proyectar una forma geométrica cualquiera desde un punto y sobre un plano se hallan las intersecciones con éste de las rectas determinadas por cada punto de la forma y el punto dados. Así, por ejemplo, la proyección de un punto A sobre un plano desde O se obtiene trazando la recta a, determinada por A y O, cuya intersección con π permite hallar el punto A', imagen o proyección buscada de A(figura II.13).



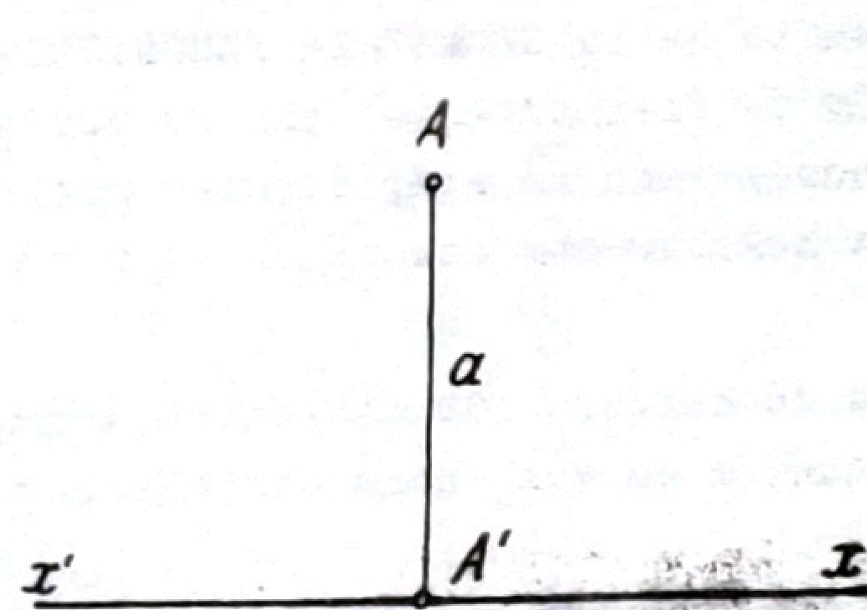
- figura II.13. -

Los puntos A y O, respectivamente se llaman punto objetivo y de vista o centro de proyección; la recta a se denomina rayo visual o proyectante, según que O sea punto de vista o centro de proyección, respectivamente; el punto A' es la imagen o proyección de A y finalmente el plano π se llama plano de proyección o cuadro.

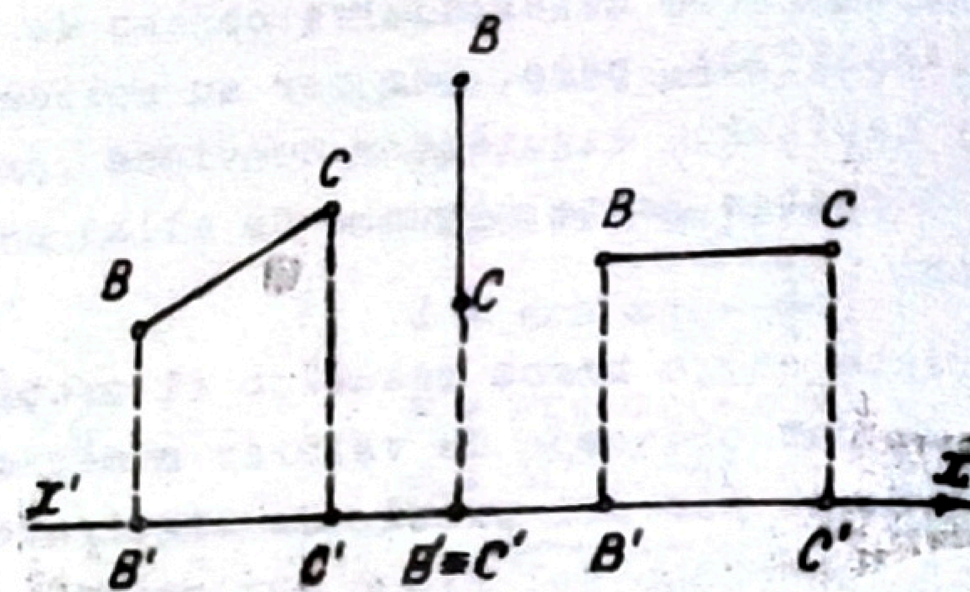
Cuando los rayos visuales o proyectantes son perpendiculares al cuadro la proyección es ortogonal.

Comunmente se proyectan formas geométricas sobre un plano pero es frecuente usar ejes o rectas como elementos sobre los cuales se proyecta. Así se hará ahora y en estas condiciones las rectas o ejes sobre los cuales se proyecta respectivamente se denominan recta y eje de proyección.

En la figura II.14 hemos proyectado ortogonalmente sobre la recta x'x un punto A obteniendo como imagen un punto A'. Utilizamos la notación A'= = $proy_{x'x}A$ que se lee: "el punto A' es la proyección de A sobre x'x".



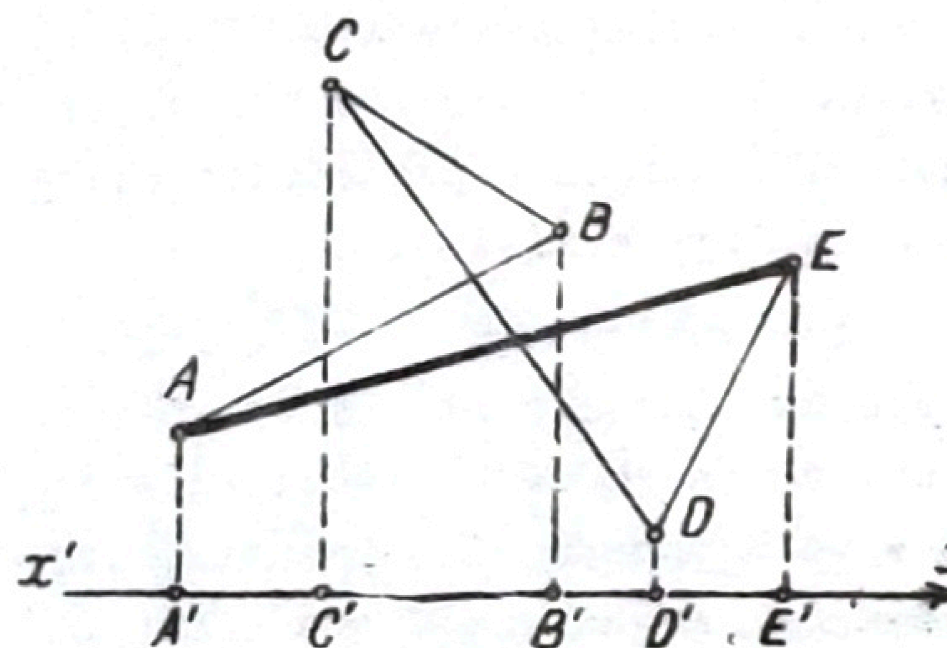
- figura II.14. -



- figura II.15. -

La proyección ortogonal de un segmento de recta BC sobre una recta x'x es otro segmento de recta determinado por las proyecciones de sus extremos y que resulta menor, un punto o igual al segmento objetivo según que éste respectivamente sea oblícuo, perpendicular o paralelo a la recta sobre la cual se efectúa la proyección.(figura II.15).-

Si la proyección ortogonal de un segmento se realiza sobre un eje resultará positiva cuando su sentido coincida con el sentido positivo del eje y negativa en caso contrario.



- figura II.16.-

La proyección de una poligonal sobre un eje es un segmento que se obtiene midiendo las proyecciones de los extremos de los segmentos que la forman.(figura II.16).

El segmento formado por el origen del primer segmento de la poligonal y el extremo del último se llama línea de cierre o resultante y los segmentos que la forman componentes.

Como teorema fundamental de la Teoría de Proyecciones basándonos en lo dicho resulta el siguiente: la proyección de la resultante de una poligonal es igual a la suma algebraica de las proyecciones de sus componentes. En efecto: sea ABCDE (figura II.16) una poligonal; proyectando sus componentes y resultante sobre el eje x'x resulta:

$$\overline{E'A'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} \qquad (1)$$

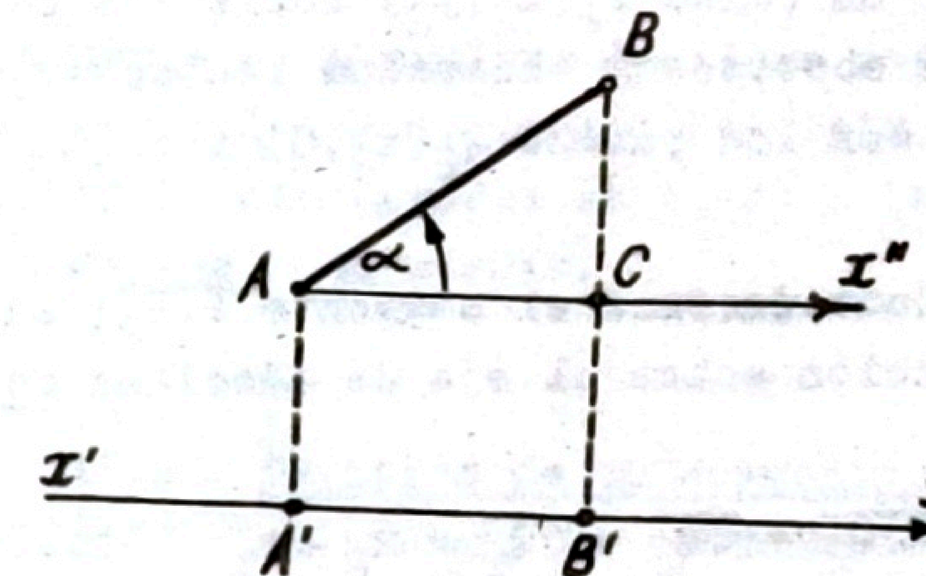
pero como:

$\overline{A'B'} = proy_{x'x}\overline{AB}$; $\overline{B'C'} = proy_{x'x}\overline{BC}$; $\overline{C'D'} = proy_{x'x}\overline{CD}$; $\overline{D'E'} = proy_{x'x}\overline{DE}$

reemplazando en la expresión (1) resulta:

$$(2) \qquad \overline{E'A'} = proy_{x'x}\overline{EA} = proy_{x'x}\overline{AB} + proy_{x'x}\overline{BC} + proy_{x'x}\overline{CD} + proy_{x'x}\overline{DE}$$

Se llama ángulo de dirección α de un segmento dirigido $\overline{AB}$ al ángulo positivo formado por el segmento dirigido con la semirrecta AX", paralela al eje de proyección de sentido positivo, cuyo origen A coincide con el origen del segmento dirigido dado.(figura II.17).



- figura II.17. -

En virtud de esta definición resulta posible demostrar el teorema que sigue: la proyección de un segmento de recta sobre un eje es igual al producto de su valor absoluto y el coseno de su ángulo de dirección. En efecto: sea (figura II.17) la proyección de un segmento AB sobre un eje x'x; determinemos el ángulo α de dirección del segmento dado y siendo C el punto de intersección del rayo proyectante BB' con AX", en el triángulo rectángulo ACB tendremos:

$$\overline{AC} = /\overline{AB}/ . \cos\alpha$$

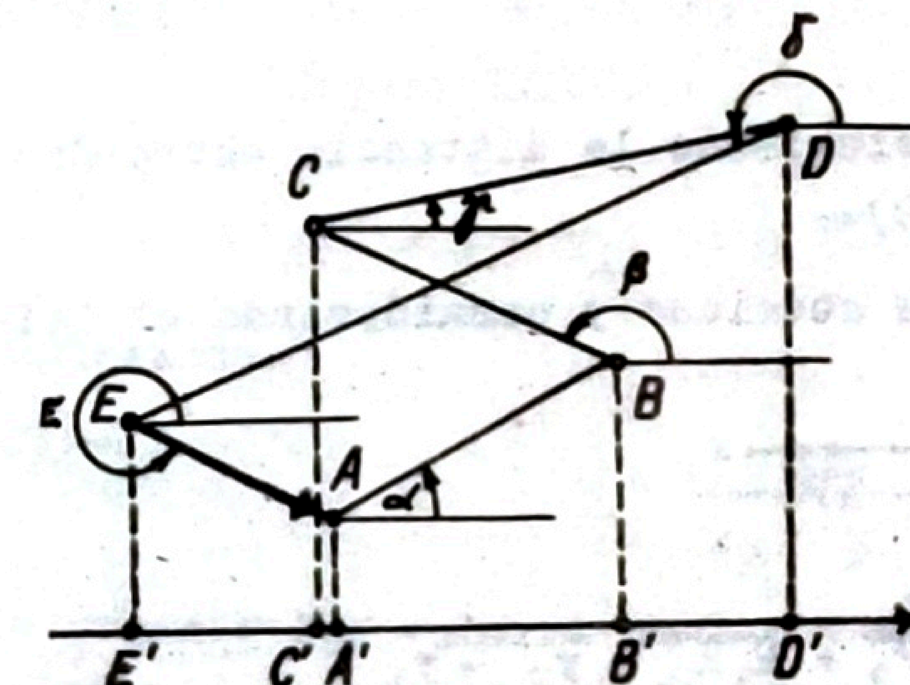
pero como:

$$\overline{AC} = \overline{A'B'} = proy_{x'x}\overline{AB}$$

igualando finalmente resultará:

$$proy_{x'x} AB = /AB/ . \cos\alpha \qquad (3)$$

Recordando que el radio-vector se supone siempre positivo, se explica que del segmento AB únicamente hayamos considerado su valor absoluto.

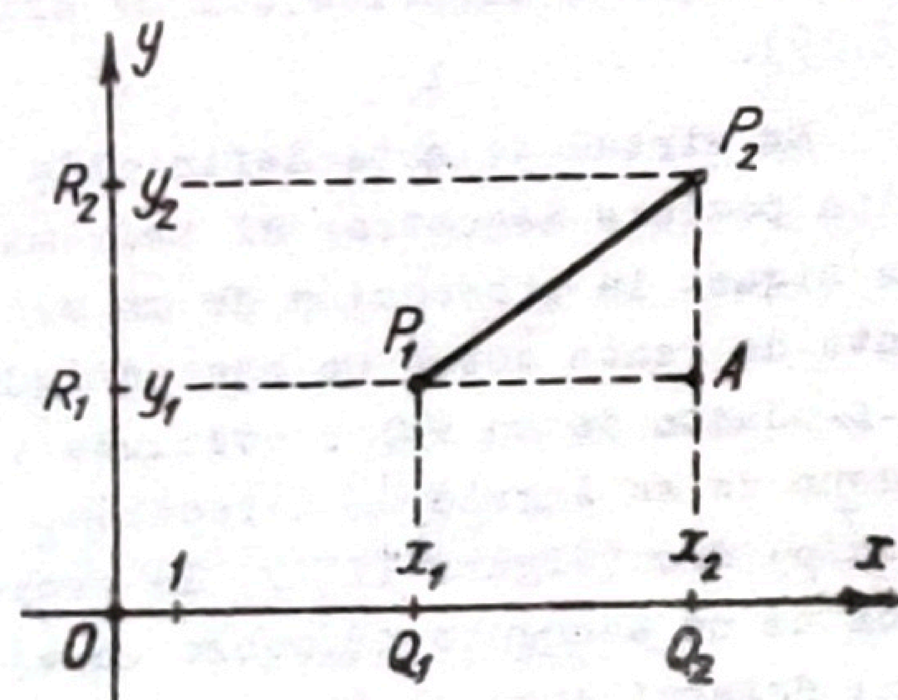


- figura II.18. -

Este teorema permite expresar en forma trigonométrica el teorema fundamental de la Teoría de Proyecciones que ahora enunciamos así: la proyección de la resultante de una poligonal es igual a la suma algebraica de los productos entre los valores absolutos de sus componentes y los cosenos de sus respectivos ángulos de dirección.En efecto: sean α, β, γ y δ los ángulos de dirección de las componentes de una poligonal ABCDE (figura II.18); proyectando aquéllas y la resultante EA sobre x'x resulta en virtud del teorema anterior, reemplazando en (2), que:

$$(4) \qquad proy_{x'x}\overline{AE} = /\overline{AB}/ . \cos\alpha + /\overline{BC}/ . \cos\beta + /\overline{CD}/ . \cos\gamma + /\overline{DE}/ . \cos\delta$$

II.6.- Proyección de un segmento de recta en coordenadas cartesianas.- Sea (figura II.19) un punto $P_1(x_1, y_1)$ referido a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales; su proyección sobre el eje de abscisas es el punto $Q_1(x_1, 0)$ y sobre el eje de ordenadas $R_1(0, y_1)$. Igualmente, las proyecciones de un punto $P_2(x_2, y_2)$ sobre los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente son los puntos $Q_2(x_2, 0)$ y R $(0, y_2)$.



- figura II.19. -

Consideremos el segmento $\overline{P_1P_2}$; su proyección sobre el eje de abscisas será:

$$\overline{Q_1Q_2} = \overline{OQ_2} - \overline{OQ_1} = x_2 - x_1$$

y sobre el eje de ordenadas:

$$\overline{R_1R_2} = \overline{OR_2} - \overline{OR_1} = y_2 - y_1$$

estas relaciones que se verifican cualquiera sea la posición de los puntos dados en el plano coordenado nos permiten concluir diciendo: la medida de la proyección de un segmento de recta sobre los ejes coordenados es igual a la diferencia de las coordenadas homónimas de los extremos del segmento.

EJEMPLOS: a) Dado el segmento $P_1(5, 7)$ $P_2(12, 2)$, sus proyecciones sobre los ejes coordenados son:

$$Proy_{s/Ox} = \overline{Q_1Q_2} = 12 - 5 = 7$$

$$Proy_{s/Oy} = \overline{R_1R_2} = 2 - 7 = -5$$

II.7.- Distancia entre dos puntos.- Calculemos la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. (figura II.19).

Trazando por P_1 una paralela al eje de abscisas y considerando el triángulo P_1AP_2, resulta:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{\overline{P_1A}^2 + \overline{AP_2}^2}$$

pero como

$$\overline{P_1A} = \overline{Q_1Q_2} = x_2 - x_1 \quad ; \quad \overline{AP_2} = \overline{R_1R_2} = y_2 - y_1$$

reemplazando:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

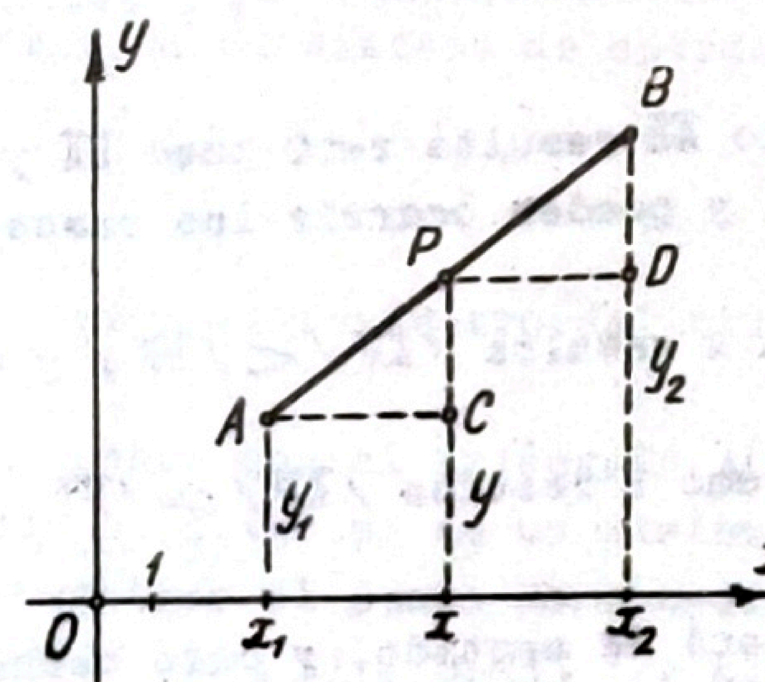
relación que se verifica cualesquiera sea la posición de los puntos dados. Luego: la distancia entre dos puntos de un plano coordenado es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de sus coordenadas homónimas.

Un caso particular de frecuente aplicación se presenta cuando se quiere calcular la distancia desde un punto cualquiera P(x, y) al origen O(o,o) del sistema de referencia. Tendremos ahora:

$$d = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

distancia a la cual se le llama radio-vector del punto P designándosela mediante la letra ρ. Luego: la distancia de un punto del plano coordenado al origen de coordenadas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus coordenadas.

II.8.- División de un segmento en una razón dada.- En un segmento $\overline{AB}$, referido a un sistema de coordenadas cartesianas, cada uno de sus puntos P, distinto de A y B, determina un valor de la relación: $\frac{AP}{PB} = r$, y recíprocamente, cada valor de dicha relación determina la posición de uno de los puntos del segmento. (figura II.20).-



- figura II.20. -

Calculemos las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ en la razón dada r.

Trazando por A y P paralelas al eje de abscisas quedan formados los triángulos ACP y PDB que son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BD}}$$

pero como:

$$\overline{AC} = x - x_1 \quad ; \quad \overline{PD} = x_2 - x$$

$$\overline{PC} = y - y_1 \quad ; \quad \overline{BD} = y_2 - y \quad ; \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = r$$

reemplazando:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

y despejando los valores de x e y para lo cual igualamos el primer y tercer miembro con el segundo de la expresión anterior, respectivamente, obtenemos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad (1)$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \qquad (2)$$

Cuando el punto P(x, y) cuya posición deséase determinar es el punto medio del segmento, resulta $\overline{AP} = \overline{PB}$ y por lo tanto r = 1; luego, las expresiones (1) y (2) respectivamente se convierten en:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

luego: las coordenadas del punto medio de un segmento son iguales a la semi suma de las coordenadas homónimas de sus extremos.

Hacemos notar que la generalización de las expresiones (1) y (2) establecen una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta determinada por los puntos A y B dados.

1. Cuando el punto P es interior al segmento $\overline{AB}$, resulta $r > 0$, pues $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están orientados en el mismo sentido, pudiendo ocurrir los casos siguientes:
   a) si P está comprendido entre el origen A y el punto medio del segmento resulta $\overline{AP} < \overline{PB}$, y por lo tanto $r < 1$;
   b) si P es el punto medio del segmento entonces $\overline{AP} = \overline{PB}$, y por lo tanto $r = 1$;
   c) si P está comprendido entre el punto medio y el extremo B, resulta $\overline{AP} > \overline{PB}$, y por lo tanto $r > 1$.
2. Cuando el punto P coincide con el origen A, resulta $\overline{AP} = 0$, y por lo tanto será $r = 0$ y $\overline{PB} = \overline{AB}$.
3. Cuando el punto P es exterior al segmento $\overline{AB}$ resulta $r < 0$ pues $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ están orientados en sentidos contrarios, y pueden ocurrir los casos siguientes:
   a) Si P está situado antes que el origen A resulta $/\overline{AP}/ < /\overline{PB}/$ y entonces será $/r/ < 1$;
   b) si P está situado después que el extremo B resulta $/\overline{AP}/ > /\overline{PB}/$ y entonces será $/r/ > 1$.
4. Queda exceptuado el punto B pues r carecerá de sentido, y como hecha esta excepción a cada r corresponde un punto y recíprocamente, se concluye que el conocimiento de r permite establecer, a primera vista, una posición relativa del punto buscado con respecto a los puntos dados, quedando exceptuado el valor $r = -1$ que no puede llevarse a las fórmulas estudiadas pues anularía sus denominadores.

EJEMPLOS: a) Calcular las coordenadas del punto que divide al segmento A(3, 5) B(-2, 6) en la relación $r = \frac{3}{5}$.

De acuerdo con las expresiones (1) y (2) tenemos reemplazando que:

$$x = \frac{3 + \frac{3}{5}(-2)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{9}{8} \quad ; \quad y = \frac{5 + \frac{3}{5}(6)}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{43}{8}$$

b) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento $M_1(4, -6)$ $M_2(-2, -4)$. Aplicando las fórmulas deducidas tenemos:

$$x = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \quad ; \quad y = \frac{-6 + (-4)}{2} = -5$$

c) Calcular la mediana m_a del triángulo A(2, 3) B(4, -5) C(-3, -6). La mediana m_a es el segmento $\overline{AM}$ donde M es el punto medio del lado $\overline{BC}$. Entonces será:

$$x = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = \frac{-5 - 6}{2} = -\frac{11}{2}$$

o sea $M(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2})$, y por lo tanto:

$$m_a = \sqrt{(\frac{1}{2} - 2)^2 + (-\frac{11}{2} - 3)^2} = \sqrt{\frac{298}{4}} \simeq 8{,}63$$

EJERCICIOS: a) Hallar la distancia entre los pares de puntos A(3, -1) - B(-2, 5) ; $M(\frac{3}{5}, -2)$ $N(\frac{3}{5}, 7)$; $P(\frac{2}{3}, \frac{3}{5})$ $Q(-\frac{5}{6}, 0)$; T(1, 3) U(-5, 5) y - efectuar su trazado en un sistema de coordenadas cartesianas.

R: $d_{ab} = \sqrt{61}$; $d_{mn} = 9$; $d_{pq} = \frac{\sqrt{261}}{10}$; $d_{tu} = 2\sqrt{10}$

b) Hallar los radio-vectores de los siguientes puntos: A(-12, 5), $B(-\frac{3}{10}, -\frac{2}{5})$ $C(\sqrt{3}, -6)$

R: $\rho_a = 13$; $\rho_b = \frac{1}{2}$; $\rho_c = \sqrt{39}$

c) Hallar las proyecciones y las longitudes de los lados del triángulo cuyos vértices son A(1, 0) B(5, -3) C(-6, 2) efectuando el correspondiente diagrama en un sistema de coordenadas cartesianas.

R: $Proy_{s/Ox} = 4, 7, 11$
$Proy_{s/Oy} = 3, 2, 5$
$a = \sqrt{146}$; $b = \sqrt{53}$; $c = 5$

d) Calcular el perímetro del triángulo A(4, 3) B(2, -2) C(-3, 5)

R: $p \simeq 21{,}3$

e) Comprobar que el triángulo A(-3, 2) B(6, 5) C(3, -1) es isósceles. Efectuar el diagrama en un sistema de coordenadas cartesianas.

f) Determinar el punto perteneciente al eje de abscisas que equidista de los puntos A(6, 3) y B(-3, 5). Efectuar la representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas.

R: $M(\frac{11}{18}, 0)$

g) Uno de los extremos de un segmento de recta cuya longitud es igual a 10 es el punto A(6, -2); la ordenada del otro extremo B es 3. ¿Cuál es su abscisa?

R: $x = 14{,}66$ ó $2{,}66$

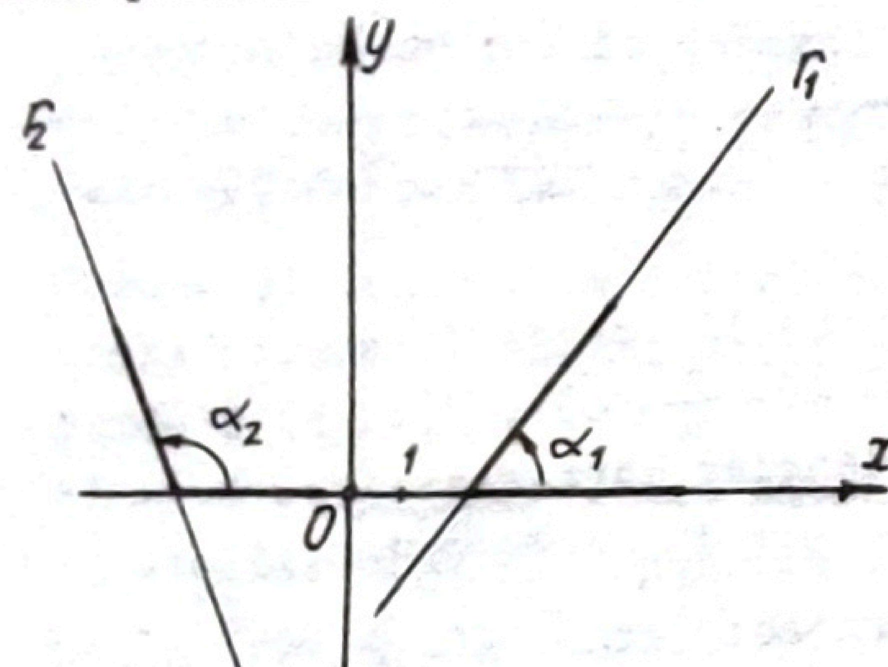
h) ¿Cuál es la ecuación que expresa algebraicamente que el punto **P(x,y)** es equidistante de los puntos (3,2) y (5,9)

i) Demostrar que el punto (6,5) se halla sobre una recta que úne los puntos (3, 2) y (9, 8) y que es equidistante de ambos.

II.9.- **Inclinación y pendiente de una recta.-** Cuando una recta del plano coordenado corta al eje de abscisas, en general, determina con él cuatro ángulos, dos tienen uno de sus lados coincidentes con el sentido positivo del mencionado eje y los dos restantes poseen uno de sus lados coincidentes con la dirección de su sentido negativo. (figura II.21).

De ellos elijamos el ángulo que, encontrándose en el semiplano respecto del eje de abscisas que tiene ordenadas positivas, posee su lado coincidente

con su sentido positivo, es decir el ángulo que está orientado en sentido positivo a partir de este eje; bastará entonces con uno de los cuatro ángulos posibles para determinar la dirección de la recta.



El ángulo así elegido recibe el nombre de inclinación de la recta y generalmente se lo designa con la letra α.

Luego: el ángulo formado por una recta con el sentido positivo del eje de abscisas y cuyos lados coinciden y pertenecen al semiplano de ordenadas positivas, es su ángulo de inclinación.

Si la recta no corta al eje, y esto sucede cuando es paralela, la inclinación existe pero se dice que es nula.

Es así entonces como en base a estas observaciones podemos establecer el intervalo de definición del ángulo α mediante la siguiente desigualdad: $0 \leq \alpha \leq \pi$.

El concepto de inclinación de una recta se relaciona con el valor de su tangente trigonométrica que, recibiendo el nombre de pendiente de la recta, se lo simboliza con la letra m, o sea que: $\operatorname{tg} \alpha = m$.

Recordando la variación de la tangente en los dos primeros cuadrantes tenemos que si:

$\alpha = 0$	entonces	$m = 0$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	"	$m > 0$
$\alpha \to \frac{\pi}{2}$	"	$m \to \pm\infty$
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	"	$m < 0$

y estas relaciones permiten apreciar que la pendiente de una recta es un número real cualquiera.

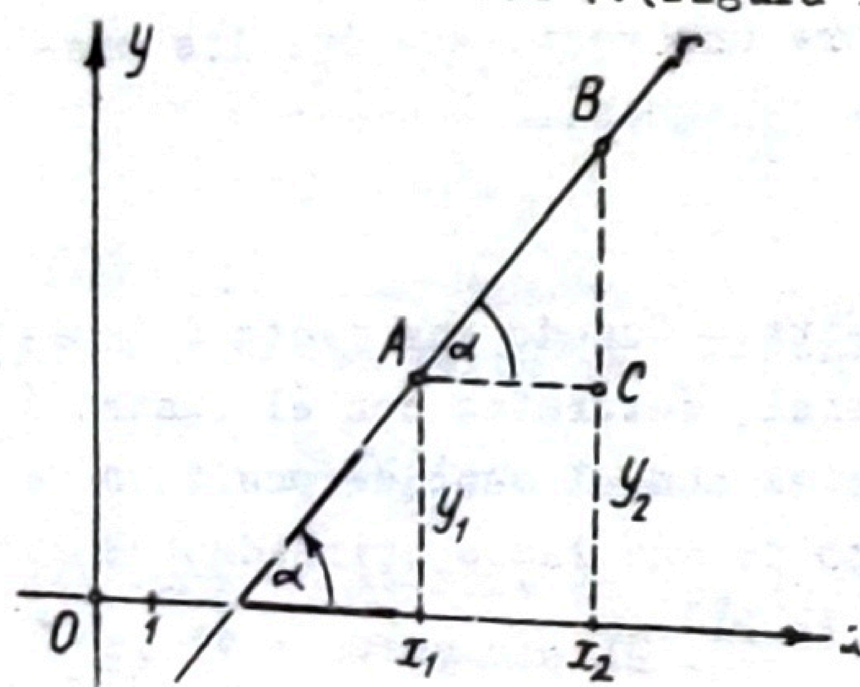
Como una recta frecuentemente se determina en función de la posición de dos de sus puntos veamos como se calcula su pendiente con estos datos.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquieras pertenecientes a una recta r de inclinación α.(figura II.22). Trazando por A una paralela al eje de abscisas queda formado el triángulo ACB rectángulo en donde $\widehat{BAC} = \alpha$ por tratarse de ángulos correspondientes entre paralelas. Luego: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{AC}$ pero como, por definición, $\operatorname{tg}\alpha = m$, y:

$$CB = y_2 - y_1 \quad ; \quad AC = x_2 - x_1$$

resulta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$



- Figura II.22 -

luego: la pendiente de una recta es igual al cociente entre la diferencia de ordenadas y abscisas de dos de sus puntos.

EJEMPLOS: a) Calcular la pendiente de la recta cuya inclinación es $\alpha = 27^o15'2$. De la tabla obtenemos $m = \operatorname{tg} 27^o15'2 = 0{,}5151$.-

b) Idem a) para $\alpha = 132^o35'5$. Como α pertenece al segundo cuadrante se entra a la tabla con el ángulo suplementario; luego:

$$\alpha_t = \operatorname{tg} 179^o59'10 - 132^o35'5 = 47^o24'5$$

y tendremos:

$$m = \operatorname{tg} 132^o35'5 = -\operatorname{tg} 47^o24'5 = -1{,}08781$$

c) Calcular la inclinación de una recta cuya pendiente es $m = 1{,}4578$. De la tabla obtenemos $\alpha = 55^o33'1$.

d) Idem c) para $m = -1{,}02735$. Como $m < 0$, la inclinación $\alpha < \frac{\pi}{2}$ y es el suplemento del ángulo cuya tangente trigonométrica es $/m/ = 1{,}02735$. Entrando a la tabla con $/m/ = 1{,}02735$ obtenemos $\alpha_t = 45^o46'4$, y por lo tanto será: $\alpha = 180^o - \alpha_t = 134^o13'6$.

EJERCICIOS: a) Calcular la pendiente de las rectas cuyas inclinaciones son:

$20^o15'8$	;	$95^o30'2$	;	$172^o80'2$	;	$86^o30'7$
$4\pi/3$	;	$\pi/3$	;	$5\pi/6$	;	$3\pi/8$

b) Calcular la inclinación de las rectas cuyas pendientes son:

0,70021	;	-0,76042	;	-1,50380	;	-8,34790

c) Calcular la pendiente e inclinación de las siguientes rectas:

$A(3, 2)$ $B(-2, -3)$	;	$A(2, 0)$ $B(5, -1)$
$A(5, 0)$ $B(0, -7)$	;	$A(\frac{5}{3}, \frac{3}{5})$ $B(-\frac{3}{8}, -\frac{5}{7})$

d) Calcular la inclinación del lado a del triángulo $A(2, 0)$ $B(4, 0)$ $C(-3, -4)$ así como de su mediana m_a y altura h_a. Efectuar la representación gráfica correspondiente/

R : $\alpha_a = 34^o59'4$; $\alpha_{ma} = 41^o48'6$; $\alpha_{ha} = 124^o59'4$

II.10.- <u>Angulo de dos rectas.-</u> Cuando dos rectas coplanares se cortan determinan cuatro ángulos. Para encarar el problema de determinar la inclinación de una recta respecto de la otra es necesario, cuando no son perpendiculares, elegir previamente el ángulo que se considerará en cada caso. Por ello convendremos, al calcular el ángulo de dos rectas no perpendiculares, en considerar uno cualquiera de los ángulos agudos formados. -

Consideremos entonces dos rectas r y r' de pendientes $m_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ y $m_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$; determineremos el ángulo Ω que forman al cortarse en el punto A. (figura II.23).-

Como en el triángulo ABC cuyos vértices están determinados por las intersecciones de r y r' con el eje de abscisas, el ángulo α_2 es exterior,- resulta:

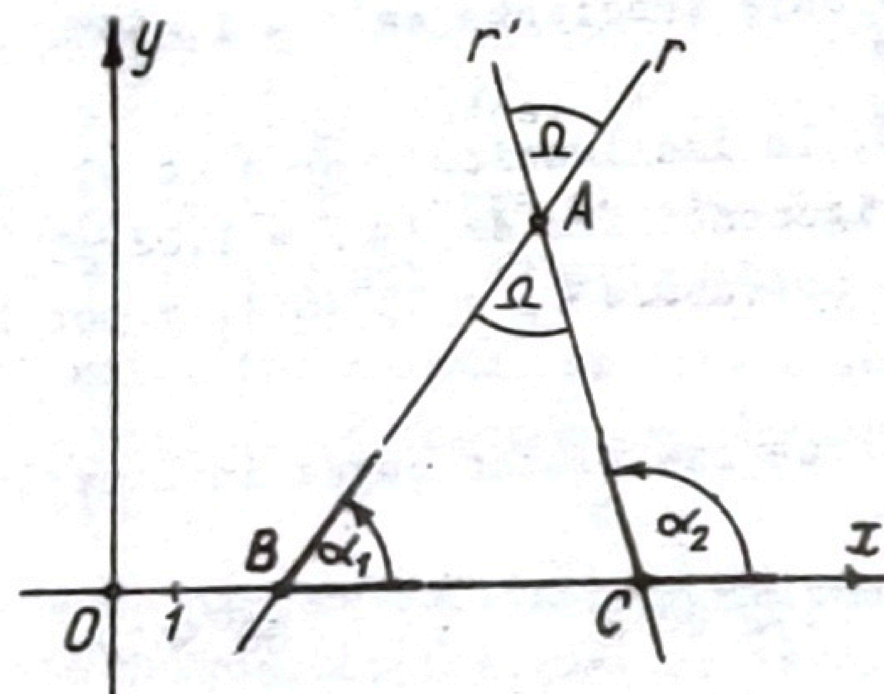
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Omega$$
$$\Omega = \alpha_2 - \alpha_1$$

luego:

$$tg\,\Omega = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

o sea:

$$\boxed{tg\,\Omega = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}} \qquad (1)$$



- figura II.23 -

expresión que permite calcular la pendiente o inclinación de una de las rectas con respecto a la otra. Si las rectas dadas son paralelas resulta:

$$\Omega = 0 \quad y \quad tg\,\Omega = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$$

o sea:

$$\boxed{m_1 = m_2} \qquad (2)$$

por lo tanto: la pendiente de dos rectas paralelas son iguales. Finalmente si las rectas son perpendiculares tenemos:

$$\Omega = \frac{\pi}{2} \qquad y \qquad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

de donde:

$$tg\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -ctg\,\alpha_1$$

o sea:

$$tg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$$

de donde:

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}} \qquad (3)$$

por lo tanto: dos rectas perpendiculares tienen sus pendientes opuestas e inversas.

EJEMPLOS: a) Calcular el ángulo que forman dos rectas de pendientes $m_1 = \frac{2}{3}$ y $m_2 = -\frac{1}{5}$. Aplicando la expresión (1) tendremos:

$$tg\,\Omega = \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}} = -\frac{13}{13} = -1$$

y como establecimos que el ángulo que interesa es el ángulo agudo que las rectas dadas forman al cortarse será $\Omega = 45^o$.

b) Verificar que la recta determinada por A(3 , 7) B(2 , 0) es paralela a la que pasa por los puntos P(5 , -15) Q(10 , 20). Para $\overline{AB}$ resulta: $m_1 = 7$ y para $\overline{PQ}$ se obtiene $m_2 = 7$. Luego: como $m_1 = m_2$ resulta $\overline{AB}$ paralela a $\overline{PQ}$.

EJERCICIOS: a) Calcular el ángulo formado por las rectas cuyas pendientes son $m_1 = \frac{2}{3}$ y $m_2 = \frac{3}{5}$.

R: $\Omega = 2^o43'6$

b) Idem a) para $m_1 = -\frac{2}{5}$ y $m_2 = -1$

R: $\Omega = 23^o11'9$

c) Calcular los ángulos del triángulo A(5 , 0) B(0 , 5) C(-5 , -2). Efectuar la representación gráfica.

R: $\alpha = 56^o18'6$; $\beta = 80^o32'3$; $\gamma = 23^o09'1$

d) Verificar que una recta cuya pendiente es $m_1 = 5$ es perpendicular a la recta que pasa por A(-5 , 6) B(5 , 8). En efecto: para $\overline{AB}$ será $m_2 = -\frac{1}{5}$ y como $m_1 \cdot m_2 = 5(-\frac{1}{5}) = -1$, las rectas de pendientes consideradas son perpendiculares entre sí.

e) Demostrar mediante relaciones de pendientes que los puntos A(-4 , -3) - B(15 , 7) C(-14 , 14) son los vértices de un triángulo rectángulo. Efectuar la representación gráfica.

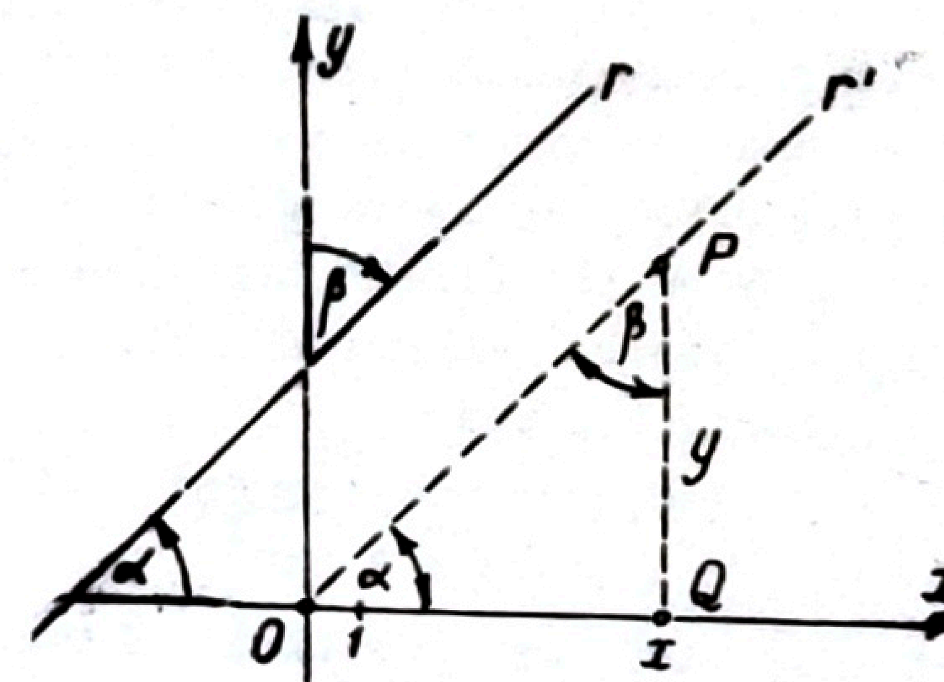
f) Demostrar que la recta que une los puntos A(a , b) B(c , d) es perpendicular a la determinada por los puntos C(a , d) D(c ,b).

g) Demostrar que la recta determinada por A(3 , 2) B(7 , 5) es normal a la determinada por C(3 , 5) D(0 , 9). Efectuar la representación gráfica.

h) Demostrar que el cuadrilátero A(1 , 2) B($-\frac{7}{2}$, -2) C(0 , -6) D($\frac{9}{2}$, $-\frac{3}{2}$) es un rectángulo. Efectuar la representación gráfica.

II.11.- Cosenos directores de una recta.- En forma completamente análoga a la utilizada en el parágrafo II.9., se puede fijar la posición de una recta tomando como eje de referencia el de las ordenadas. Así quedará definido el ángulo β (figura II.24) que es el ángulo formado por la recta con el sentido positivo del eje de ordenadas y cuyo otro lado pertenece al semiplano de abscisas positivas.

Los ángulos α y β se denominan ángulos directores de la recta y es muy frecuente utilizar sus cosenos respectivos que se llaman cosenos directores de la recta.



- figura II.24 -

Los ángulos directores de una recta se relacionan entre sí y basta con conocer uno de ellos para determinar la dirección de la recta.

En efecto: consideremos una recta cualquiera r (figura II.24) cuyos ángulos directores son α y β. Tracemos una paralela r' a ella por el origen del sistema de coordenadas y consideremos un punto genérico P(x , y) de la misma. Será entonces $\hat{POQ} = \alpha$ y $\hat{OPQ} = \beta$ y por lo tanto:

$$x = \overline{OP}\,.\cos\alpha = d\,.\cos\alpha \quad ; \quad y = \overline{OP}\,.\cos\beta = d\,.\cos\beta$$

pero como:

$$x^2 + y^2 = d^2$$

reemplazando x e y por los valores anteriores finalmente quedará:

$$(d\,.\cos\alpha)^2 + (d\,.\cos\beta)^2 = d^2$$

o sea:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1} \qquad (1)$$

expresión que nos permite hallar uno de los cosenos directores conocido el otro.-

Los cosenos directores de una recta pueden definirse en otra forma parcialmente distinta a la considerada, utilizando el concepto de recta orientada, lo cual resulta útil cuando se quieren considerar los cosenos directores de un segmento e interesa distinguir cual es su origen y cual su extremo. En tales casos los ángulos directores están determinados por el sentido positivo de la recta dada con los sentidos positivos de cada uno de los ejes coordenados. Esta condición sustituye a la que establecimos anteriormente al exigir que el otro lado del ángulo perteneciera al semiplano de ordenadas o abscisas positivas.

Se comprende, entonces, que el segmento determinado por dos puntos cambia de cosenos directores cuando cambia su sentido; y si bien la relación: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ conserva su validez será necesario plantear en otra forma las condiciones que hagan desaparecer la ambigüedad que surge del doble signo del radical cuando se quiera calcular uno de ellos conocido el otro.

En la práctica es común en lugar de dar directamente los cosenos directores dar números proporcionales a ellos, o sea:

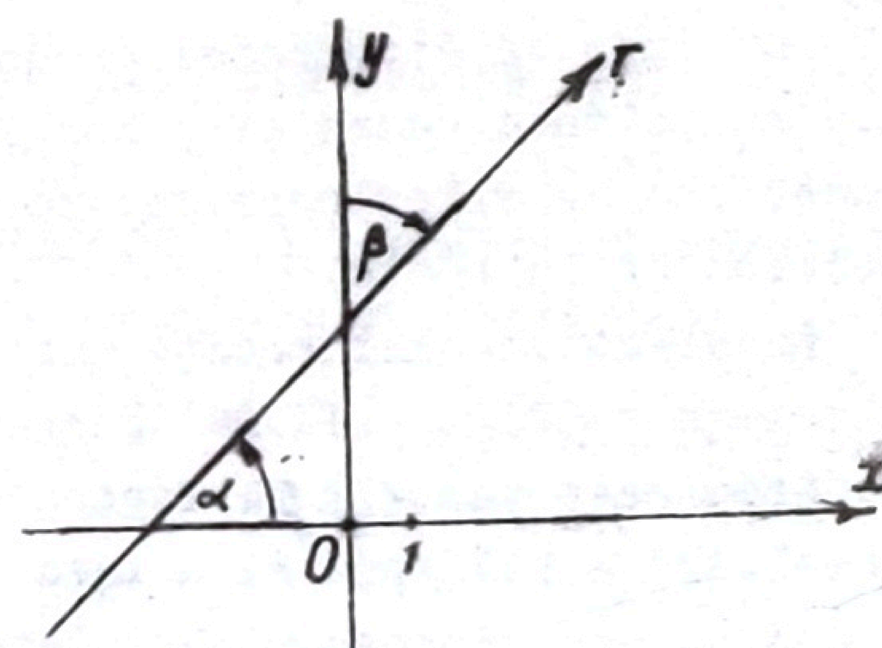
$$\cos\alpha = k.a \quad ; \quad \cos\beta = k.b$$

y aplicando la expresión (1) será:

$$(k.a)^2 + (k.b)^2 = 1$$

de donde:

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (2)$$



- figura II.25 -

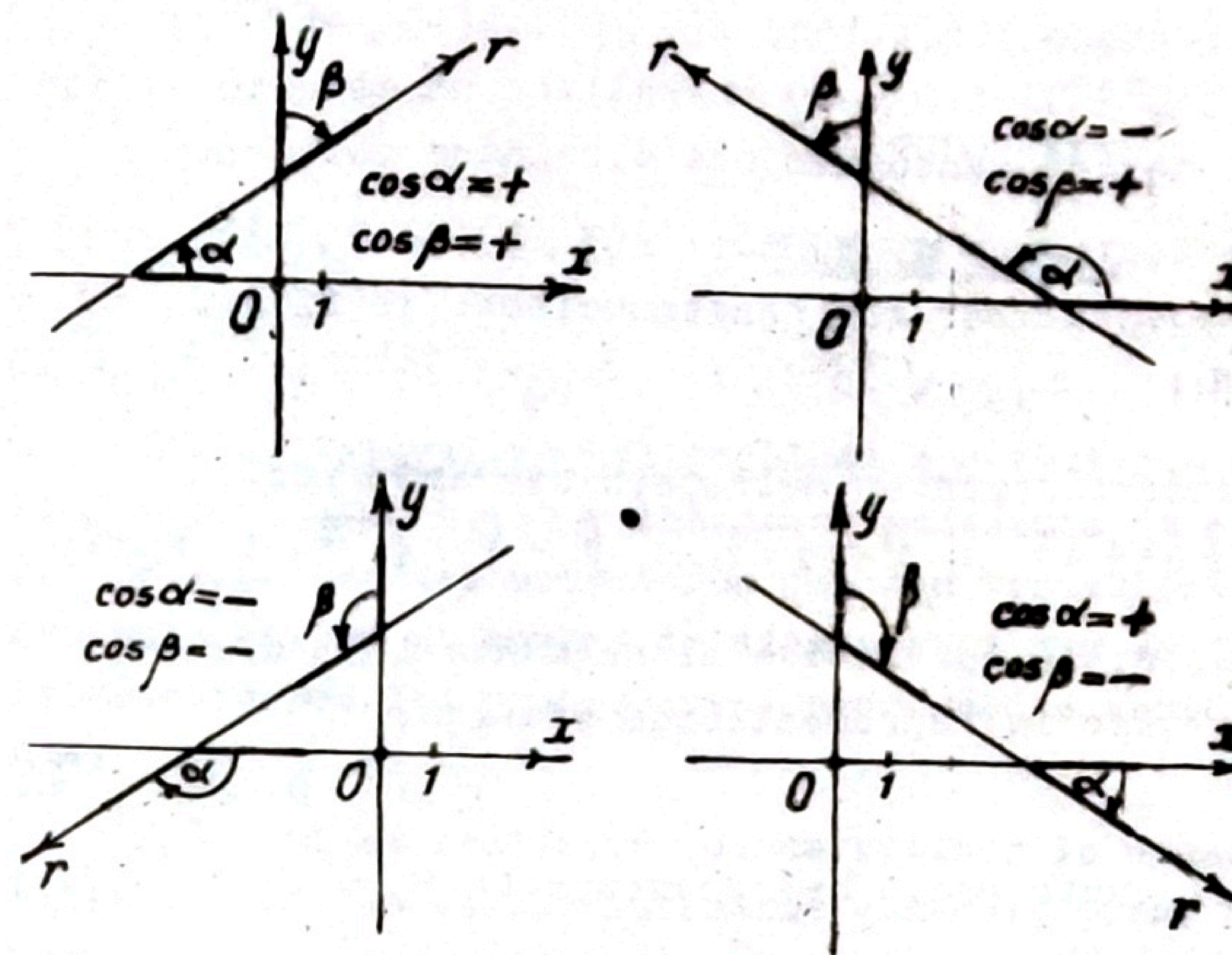
La dualidad del signo k la salvamos facilmente considerando que, en el caso de que el segmento de recta esté orientado hacia arriba será: $\beta < \frac{\pi}{2}$ y en tal circunstancia será $\cos\beta$ positivo. (figura II.25).

Ahora bien como:

$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (3)$$

para que $\cos\beta$ sea positivo, si b es negativo tendrá que estar el radical de la expresión (3) afectado del signo menos, y si por el contrario b es po-

sitivo el radical deberá estar afectado del signo más; luego: cuando el segmento esté orientado hacia arriba el signo del radical deberá ser el mismo que el de b, numerador de la expresión que nos permite calcular $\cos\beta$.



- figura II.26 -

En la figura II.26 se aprecia un estudio de los signos de los cosenos directores de acuerdo a como se encuentre orientado el segmento de recta en los distintos cuadrantes. Como se puede apreciar conociendo los signos de los cosenos directores puede graficarse la orientación del segmento de recta correspondiente.-

Nosotros salvo que expresamente indiquemos lo contrario tomaremos siempre en la expresión (2) el signo positivo del radical y efectuaremos el cálculo de los cosenos directores suponiendo a $k > 0$.-

EJEMPLOS: a) Dados $a = 3\sqrt{3}$ y $b = -3$ hallar $\cos\alpha$ y $\cos\beta$. Graficar la orientación del segmento de recta correspondiente. Tendremos entonces:

$$\cos\alpha = 1.a = 3k\sqrt{3} \quad ; \quad \cos\beta = k.b = -3k$$

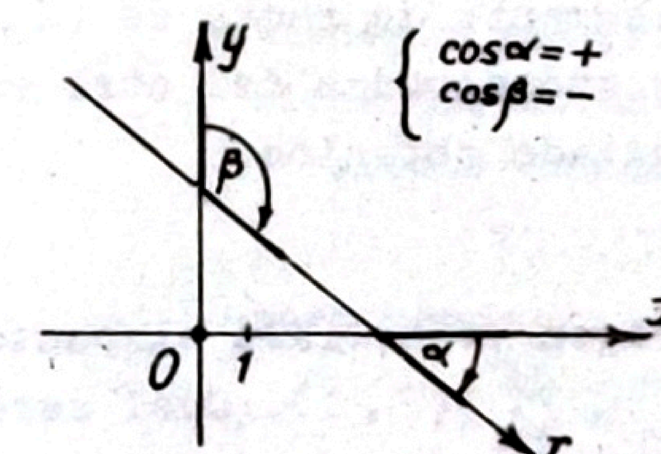
luego:

$$k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$$

reemplazando:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \cos\beta = -\frac{1}{2}$$

y el gráfico correspondiente se aprecia en la figura II.27.-



- figura II.27 -

EJERCICIOS A RESOLVER

1. Construir en un plano coordenado los puntos $A(5, 0)$; $B(-3, -\sqrt{5})$; $C(\sqrt{10}, 0)$; $D(2, -5)$; $E(-5, \sqrt{3})$; $F(0, -2)$ y realizar un estudio de los signos de las coordenadas de los puntos en sus distintos cuadrantes.

2. Hallar la distancia entre los pares de puntos: $A(3, 2)$ $B(-2, -3)$; $P(5, 2)$ $Q(-3, 5)$; $R(-5, 3)$ $S(1, -5)$. Realizar las construcciones gráficas.

   R: $\delta_{AB} = \sqrt{13}$; $\delta_{PQ} = \sqrt{74}$; $\delta_{RS} = 10$

3. Hallar los radio-vectores de los puntos del ejercicio anterior.

   R: $\rho_A = \rho_B = \sqrt{13}$; $\rho_P = \sqrt{29}$; $\rho_Q = \rho_R = \sqrt{34}$; $\rho_S = \sqrt{26}$

4. Hallar las coordenadas del punto que divide al segmento $A(3, 2)$ $B(-2, -3)$ en la razón $r = -\frac{1}{5}$. Realizar la representación gráfica.

   R: $P\left(\frac{17}{4}, \frac{13}{4}\right)$

5. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento $A(-3, 5)$ $B(2, -3)$. Realizar la representación gráfica.

   R: $M\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

6. Calcular las coordenadas de los puntos que dividen al segmento $A(5, 2)$ $B(-5, -2)$ en tres partes iguales. Realizar la representación gráfica.

   R: $M_1\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $M_2\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

7. Uno de los extremos de un segmento de recta cuya longitud es 10 es el punto $(-2, 8)$; la abscisa del otro extremo es 2 ¿Cuál es su ordenada?

   R: $y = 8 \pm 2\sqrt{11}$

8. Calcular pendiente e inclinación de las rectas $A(1, -1)$ $B(-5, 8)$; $A(-5, 3)$ $B(2, 3)$. Hacer las construcciones gráficas.

   $m_1 = -\frac{3}{2}$; $\alpha_1 = 123°41'4$
   $m_2 = 0$; $\alpha_2 = 0°$ ó $180°$

9. Los puntos $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(6, 2)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determinar las coordenadas de los vértices de ese triángulo.

   R: $(-1, 2)$, $(5, 0)$, $(7, 4)$

10. El punto medio de un segmento de recta es $(2, 0)$ y uno de sus extremos es $(5, 4)$. Determinar las coordenadas del otro extremo. Representar gráficamente los datos y resultado obtenido.

   R: $(-4, -1)$

11. A que distancia del origen se hallará el punto que divide en dos partes iguales al segmento $A(5, 7)$ $B(7, 1)$. ¿Cuál será su pendiente? Realizar las construcciones gráficas.

   R: $\rho = 2\sqrt{13}$; $m = \frac{2}{3}$

CAPITULO III

FUNCION LINEAL

III.1.- Naturaleza del problema a estudiar.- La correspondencia entre los puntos de un plano y los pares ordenados de números reales hace posible representar las ecuaciones con dos variables. Se obtienen curvas planas que reciben el nombre de diagramas y que se definen como los lugares geométricos de los puntos cuyas coordenadas verifican las ecuaciones dadas.

El problema recíproco, de determinar la ecuación que corresponde a una curva dada no es absolutamente general, pues, existen curvas que no pueden expresarse exactamente en forma analítica. Tales curvas, llamadas curvas empíricas, serán estudiadas en los cursos de Geometría Analítica. Ahora solo estudiaremos las curvas más sencillas, cuyo uso es más frecuente en los problemas que se presentan en la técnica y la ciencias. Estas admiten una expresión analítica y por tal razón se las denomina curvas analíticas.

Comenzaremos por considerar el caso de la recta y la cuestión quedará planteada en la forma siguiente: dada una recta en el plano coordenado determinar su función, es decir, determinar una función tal que las coordenadas de un punto cualquiera de la recta la verifiquen, mientras que las coordenadas de un punto que no le pertenezca no la satisfagan.

III.2.- Ecuación general de la recta (forma explícita).- Sea r una recta cualquiera de inclinación α y que corta al eje de ordenadas en el punto R (figura III. 1). Llamemos n a la distancia $\overline{OR}$, que es su ordenada al origen; consideremos sobre la recta r un punto genérico P(x, y) y tracemos una paralela al eje de abscisas por R, hasta cortar a $\overline{PQ}$ en S. Tendremos entonces que:

$$\overline{PQ} = \overline{PS} + \overline{SQ} \qquad (1)$$

pero como:

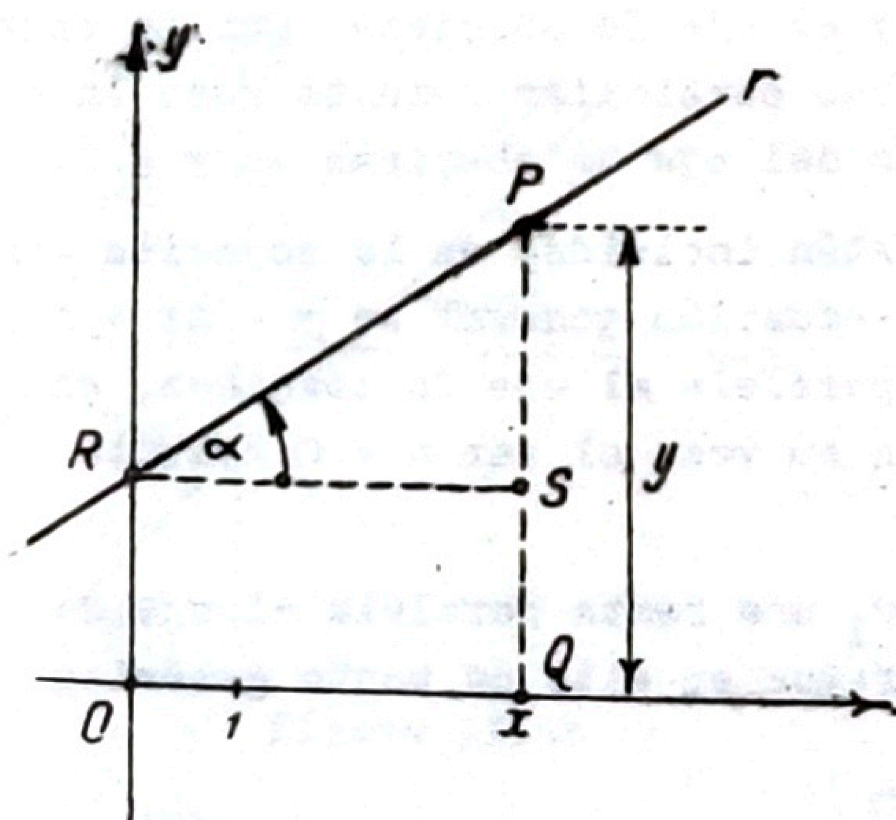
$$\overline{PS} = \operatorname{tg}\alpha\,(\overline{RS}) = mx \qquad (2)$$

$$\overline{SQ} = \overline{OR} = n \qquad (3)$$

reemplazando las expresiones (2) y (3) en (1) resultará finalmente que:

$$\boxed{y = mx + n}$$

que es la ecuación general en forma explícita buscada.



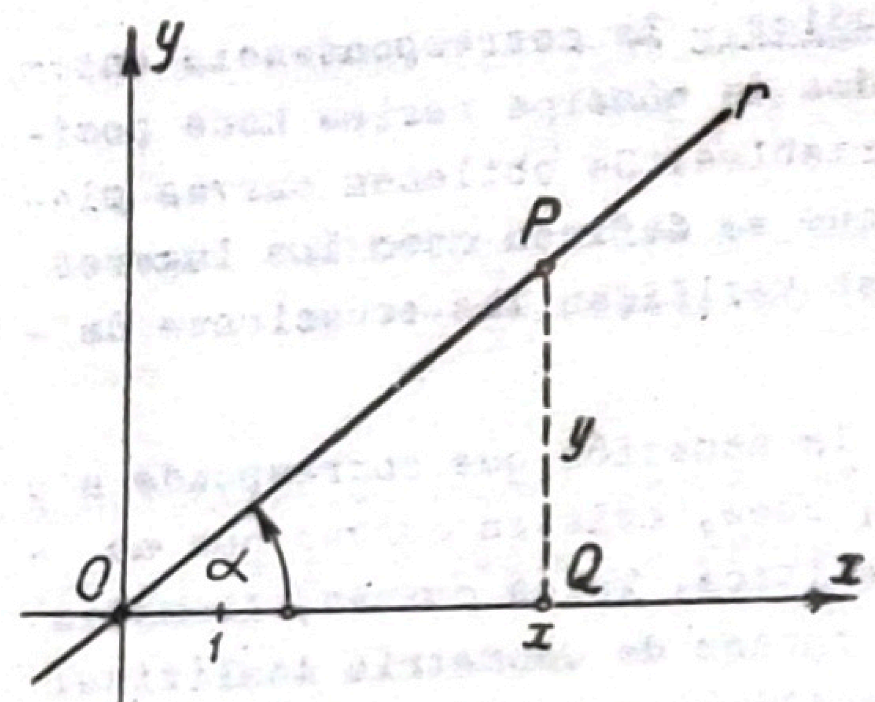
- figura III.1. -

III.3.- Casos particulares de la ecuación de la recta (forma explícita).-

a) recta que pasa por el origen. Sea una recta r que pasa por el origen del sistema de coordenadas (figura III.2). Por ser la ordenada al origen $\overline{OR} = n$ nula la expresión (4) del parágrafo III.2 se transformará y tendremos:

$$\boxed{y = mx} \qquad (1)$$

como ecuación explícita de una recta que pasa por el origen. En efecto: consideremos un punto genérico P(x , y) de r; en el triángulo OQP resultará:



- figura III.2. -

$$\overline{QP} = \overline{OQ}.\text{tg}\,\alpha \qquad (2)$$

pero como:

$$\overline{OQ} = x \quad ; \quad \text{tg}\,\alpha = m$$

reemplazando estas expresiones en (2) obtenemos (1).

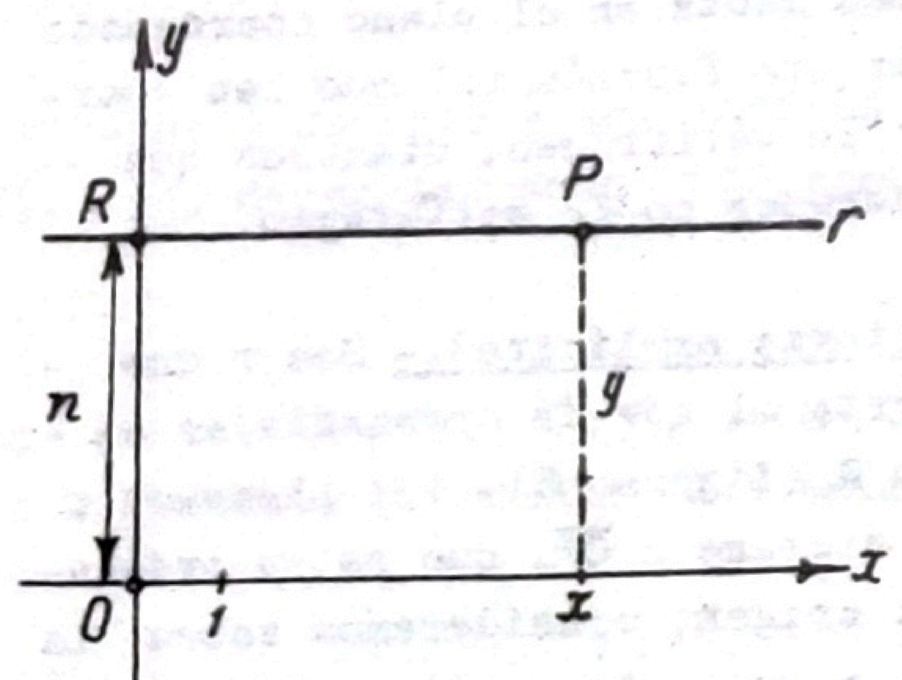
Luego: toda recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas tiene una ecuación de la forma y = mx.-

b) rectas paralelas a los ejes coordenados.

1. recta paralela al eje de abscisas. Sea r una recta paralela al eje de abscisas a una distancia $\overline{OR} = n$ (figura III. 3); consideremos en ella un punto genérico P(x , y); resultará entonces:

$$\boxed{y = n} \qquad (3)$$

como expresión.



- figura III.3. -

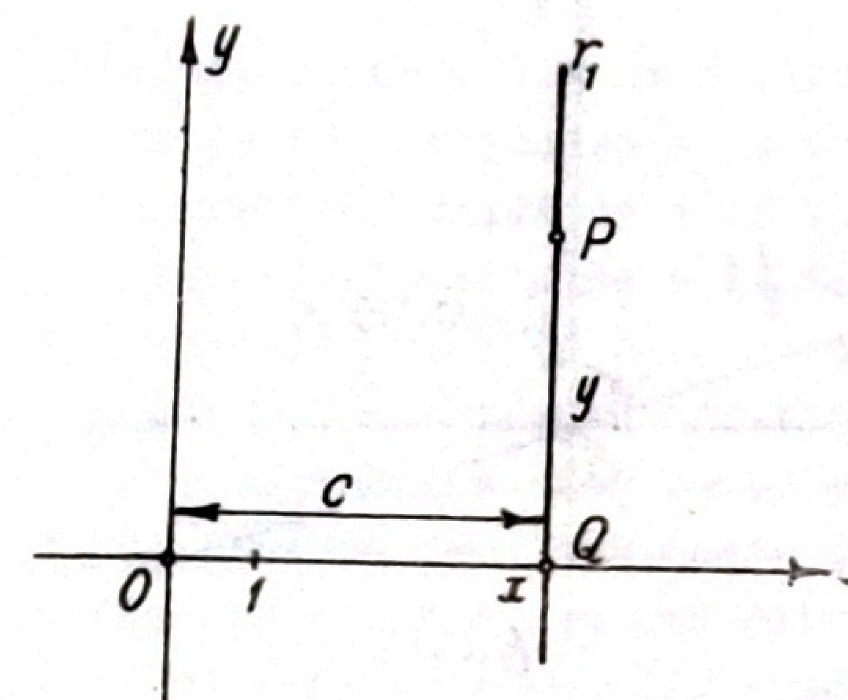
Luego: toda recta paralela al eje de abscisas tiene una ecuación de la forma y = n = constante. El valor de la constante es igual a la distancia entre la recta y el eje de abscisas, por lo tanto como caso particular resulta que: la ecuación del eje de abscisas es y = 0.

Obsérvese que estas ecuaciones también están incluídas en la ecuación general explícita de la recta. En efecto: la ecuación general es y = mx + n, pero como α = 0 y tg 0 = 0 si la recta es paralela al eje de abscisas, entonces resulta m = 0 y por lo tanto y = n. A su vez, al ser n = 0 resulta y = 0 como ecuación del eje de abscisas.

2. recta paralela al eje de ordenadas. Sea r_1 una recta paralela al eje de ordenadas a una distancia $\overline{OQ} = c$ y consideremos en ella un punto genérico P(x , y). La expresión:

$$\boxed{x = c} \qquad (4)$$

será su ecuación. (figura III.4).



- figura III.4. -

Luego: toda recta paralela al eje de ordenadas tiene una ecuación de la forma x = c = constante. El valor de la constante, en este caso, es igual a la distancia entre la recta y el eje de ordenadas, por lo tanto, la ecuación del eje de ordenadas es x = 0

Generalizando podemos establecer que a cualquier recta del plano coordenado le corresponde una ecuación de primer grado y recíprocamente, a cualquier ecuación de primer grado le corresponde una recta del plano coordenado.

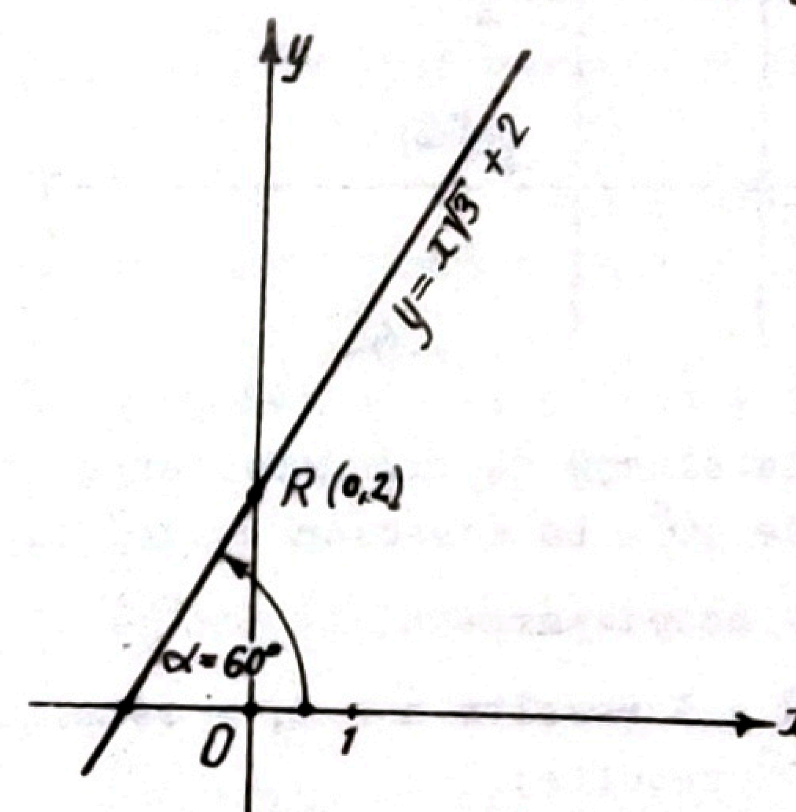
EJEMPLOS: a) La ecuación $y = \sqrt{3}.x + 2$ corresponde a una recta que corta al eje de ordenadas en el punto R(0 , 2) y cuya pendiente es:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$$

por lo que la inclinación será α = 60°, pues:

$$\text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3} = 1{,}73205$$

Su representación gráfica se aprecia en la figura III.5.

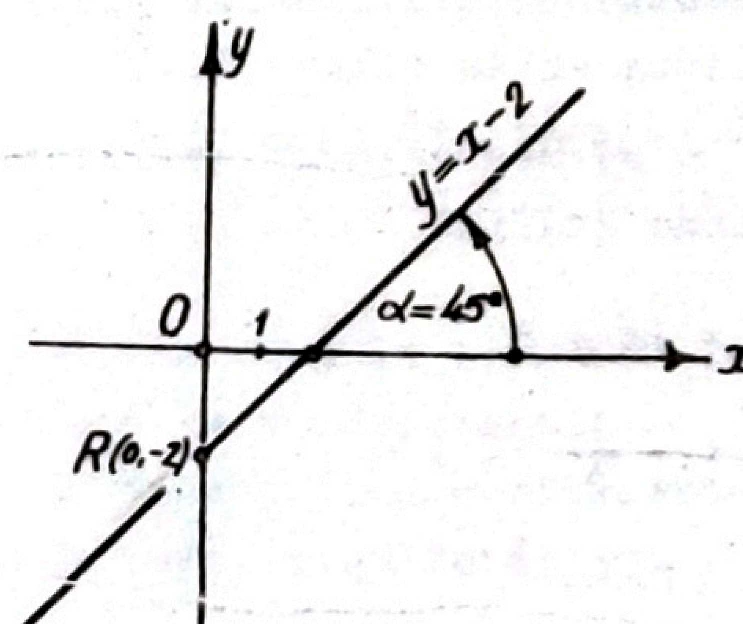


- figura III.5. -

b) La ecuación y = x − 2 corresponde a una recta que corta al eje de ordenadas en el punto R(0 , −2) y cuya pendiente es:

$$m = \text{tg}\,\alpha = 1$$

con lo cual su inclinación será α = 45°. La hemos representado gráficamente en la figura III. 6.



- figura III.6. -

c) La ecuación $y = \frac{1}{2}x$ corresponde a la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es:

$$m = \text{tg}\,\alpha = \tfrac{1}{2}$$

con lo que su inclinación será α = 26°33'9. (figura III. 7-a)

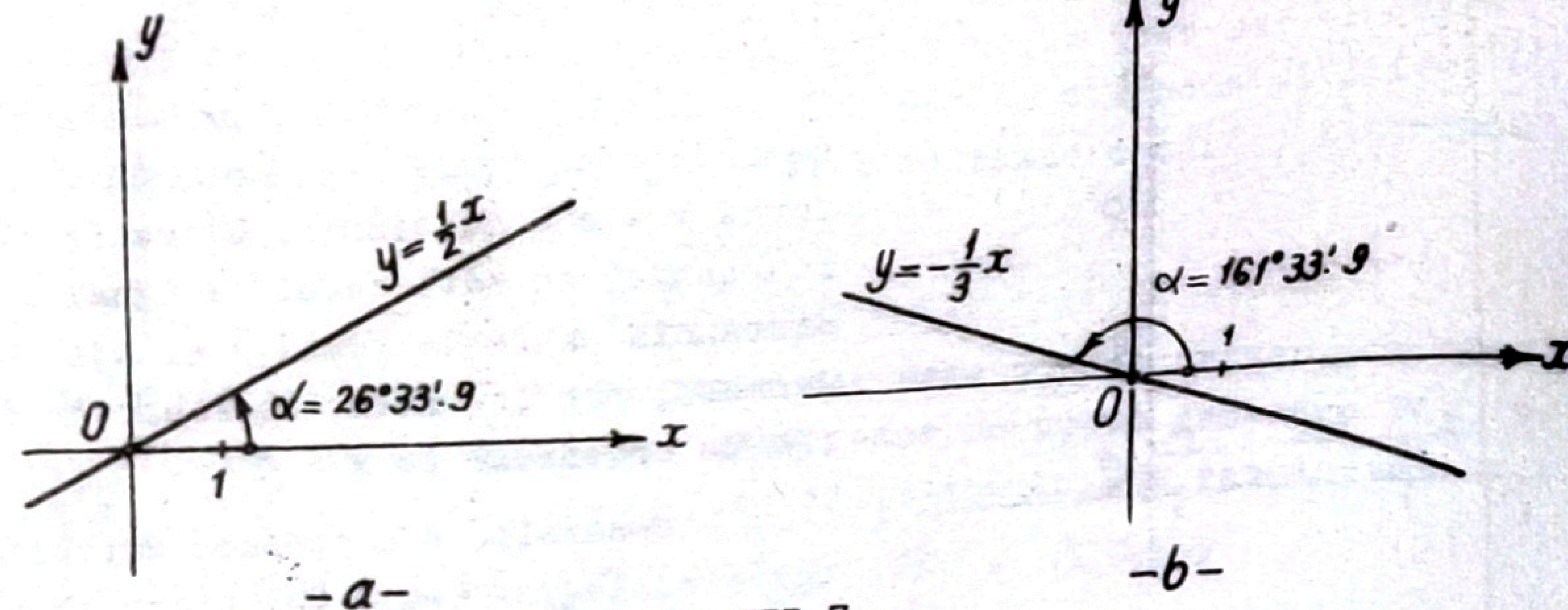
d) La ecuación $y = -\frac{1}{3}x$ corresponde a la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es:

$m = \text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{3}x$ corresponde a la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es:

$$m = \text{tg}\,\alpha = -\tfrac{1}{3}$$

con lo cual su inclinación será α = 161°33'9. (figura III.7-b).-

) La ecuación y = −5 corresponde a la recta paralela al eje de abscisas a na distancia $\overline{OR} = -5$. La hemos representado gráficamente en la figura III. -a.



- figura III.7. -

f) La ecuación $x = \frac{7}{4}$ corresponde a la recta paralela al eje de ordenadas a una distancia $\overline{OQ} = \frac{7}{4}$. (figura III.8-b).

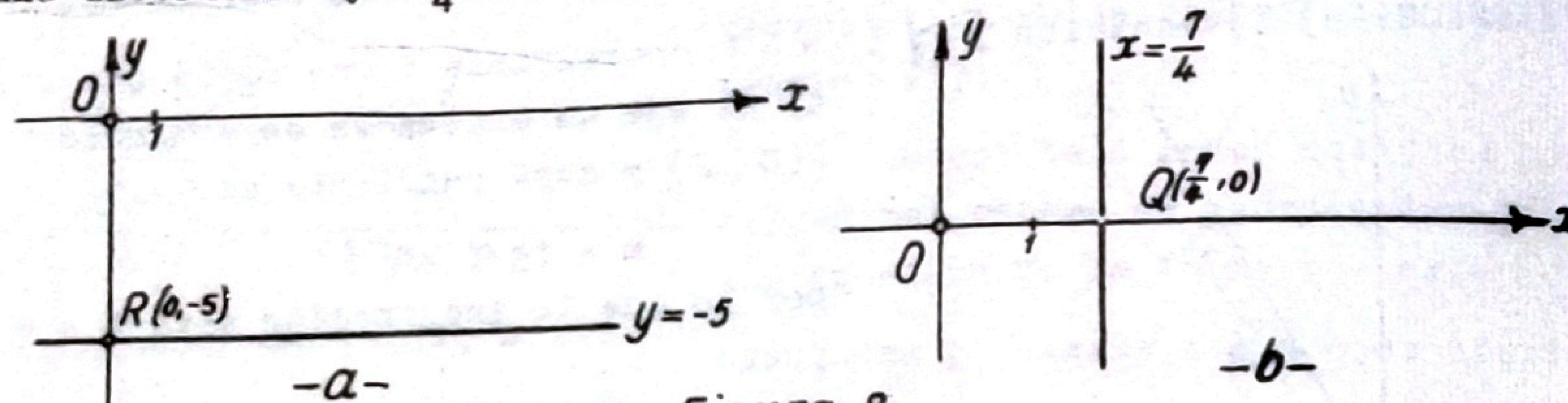
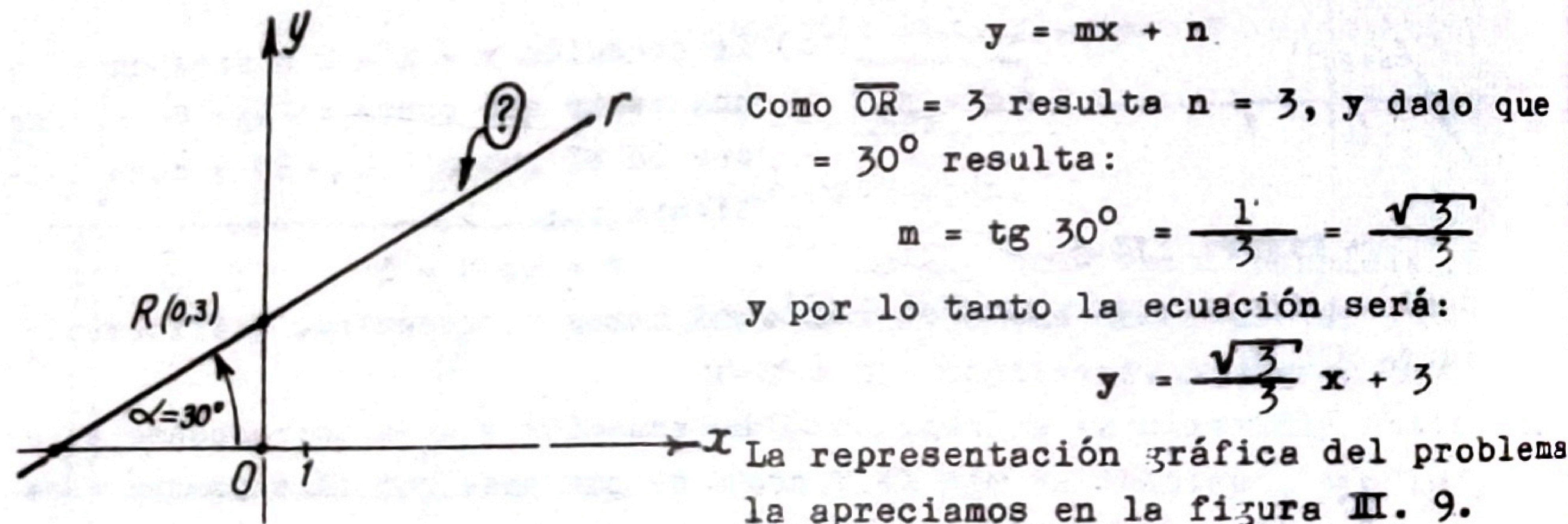


Figura 8

g) Escribir la ecuación de la recta que corta al eje de ordenadas en el punto R(0 , 3) y que tiene una inclinación de 30^o. La ecuación es del tipo:



$$y = mx + n$$

Como $\overline{OR} = 3$ resulta $n = 3$, y dado que $= 30^o$ resulta:

$$m = \operatorname{tg} 30^o = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

y por lo tanto la ecuación será:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$$

La representación gráfica del problema la apreciamos en la figura III. 9.

- figura III.9. -

EJERCICIOS: a) Representar graficamente las siguientes expresiones utilizando un mismo gráfico.

$y = -\frac{1}{3}x$;	$y = x - 3$;	$y = -x + 3$;
$y = 6x + 2$;	$y = \frac{2}{3}$;	$y = \frac{1}{3}$;
$x = -5$;	$y = 6x$;	$y = -3x$;

b) Representar en un mismo gráfico y calcular la inclinación de las siguientes rectas:

$y = \frac{2}{5}x$;	$y = -\frac{2}{5}x + 5$;	$y = -3$;	$x = 3$
$21^o48'1$;	$146^o18'6$;	0^o ;	90^o

c) Escribir la ecuación de una recta paralela al eje Oy y

1. distante 5 unidades a la derecha. R : $x = 5$
2. distante 3 unidades a la izquierda R : $x = -3$
3. distante 3 unidades a la izquierda del punto (1, -5) R : $x = -2$

d) Escribir la ecuación de una recta paralela a Ox y

1. distante 5 unidades hacia arriba de Ox R : $y = 5$
2. distante 3 unidades hacia abajo de Ox R : $y = -3$
3. distante 5 unidades hacia arriba del punto (2, -3) R : $y = 2$

e) Hallar la ecuación de una paralela a la recta $x = 3$ y distante 2 unidades a la derecha de ella. Representar gráficamente. R : $x = 5$

f) ¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico de un punto que se desplaza constantemente a una distancia de 5 unidades del eje Ox?¿del eje Oy?¿de la recta $x = -3$?¿de la recta $y = 2$? Realizar la representación gráfica.
R : $x = 5$; $x = 5$; $x = 2$; $y = 7$

g) Representar graficamente y escribir las ecuaciones de los lados del rectángulo A(3 , 3) B(3, -2) C(-2 , -3) y D(-2 , 3)
R : $\overline{AB}$: $x=3$; $\overline{BC}$; $y = -2$; $\overline{CD}$: $x = -2$; $\overline{DA}$: $y = 3$

h) Representar graficamente y escribir las ecuaciones de las rectas siguientes:

1. que pasa por el origen y tiene una inclinación de 60^o. R : $y = x\sqrt{3}$
2. que corta al eje Oy en el punto (0 , $-\sqrt{3}$) y tiene una inclinación de 30^o.
   R: $y = \sqrt{3}\left[\frac{1}{3}x - 1\right]$
3. perpendicular a la recta 1. y que corta al eje Oy en el punto (0, 2).
   R: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$
4. que corta al eje Oy en el punto (0 , -2) y cuya inclinación es de 45^o.
   R: $y = x - 2$

i) Decir si los puntos (5 , 0) , (3, -2) , (8 , 3) , (3 , 2) , (7 , 6) (7 , 2) pertenecen a la recta $y = x - 5$. Hacer el diagrama.

j) Calcular el ángulo que forman al cortarse las rectas $y = 6x + 2$; $y = -x-2$. Realizar la representación gráfica.

III.4.- **Función lineal.-** Consideremos la expresión general de la ecuación de primer grado con dos variables:

$$ax + by + c = 0$$

en ella es posible expresar la variable y en función de x, o viceversa. Veamos cual es su diagrama.

Supuestos los coeficientes a y b, y el término independiente c, distintos de cero, resultará:

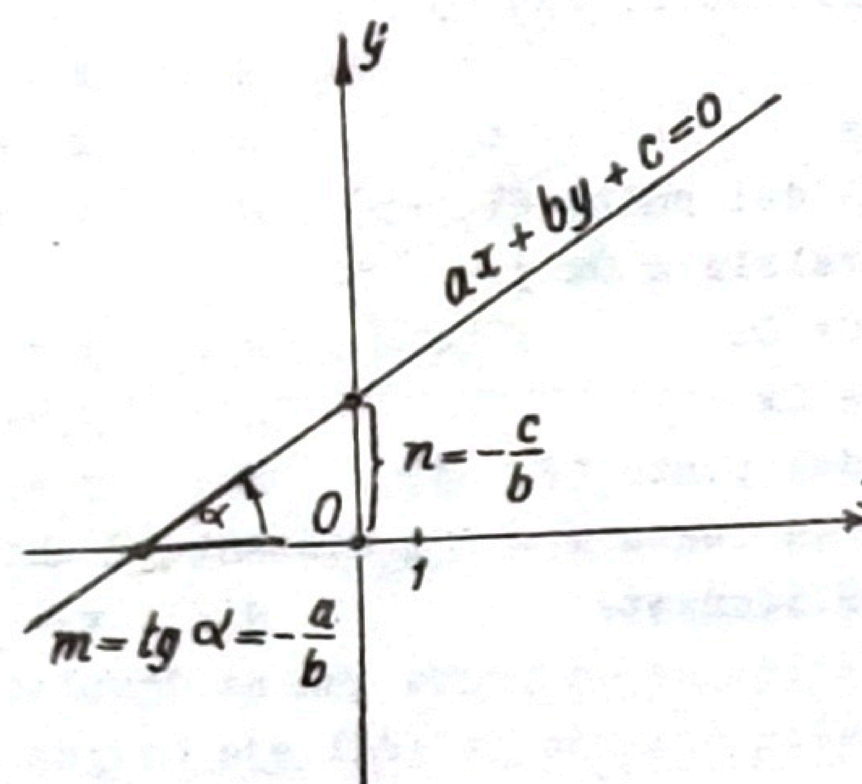
$$y = f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (1)$$

y haciendo:

$$(2) \quad m = -\frac{a}{b} \quad ; \quad n = -\frac{c}{b} \quad (3)$$

tendremos reemplazando (2) y (3) en (1) que:

$$\boxed{y = f(x) = mx + n}$$



- figura III.10. -

luego: el diagrama de la expresión general de la ecuación de primer grado con dos variables es una recta que no pasa por el origen del sistema de coordenadas de pendiente $-\frac{a}{b}$ y ordenada al origen $-\frac{c}{b}$. (figura III. 10).

La expresión (1) representa además en forma implícita una función racional entera de primer grado y por ser su diagrama una recta también la llamaremos función lineal.

Si c = 0 la expresión (1) será:

$$ax + by = 0$$

luego:

$$y = f(x) = -\frac{a}{b}\,x$$

y de (2) resultará:

$$\boxed{y = f(x) = mx} \qquad (5)$$

luego: el diagrama de la ecuación de primer grado con dos variables que carece de término independiente es una recta que pasa por el origen y de pendiente $-\frac{a}{b}$.

Si a = 0 la expresión (1) será:

$$by + c = 0$$

luego:

$$y = -\frac{c}{b} = \text{constante}$$

y de (3) ha de ser:

$$\boxed{y = n = \text{constante}}$$

luego: el diagrama de una ecuación de primer grado con dos variables, careciendo de término en x, es una recta paralela al eje de abscisas.

Si b = 0 la expresión (1) será:

$$ax + c = 0$$

luego:

$$x = -\frac{c}{a} = \text{constante}$$

y haciendo:

$$C = -\frac{c}{a}$$

resulta:

$$\boxed{x = C = \text{constante}}$$

luego: el diagrama de una ecuación de primer grado con dos variables, careciendo de término en y, es una recta paralela al eje de ordenadas.

Si a = c = 0 la expresión (1) ha de ser:

$$by = 0$$

$$\boxed{y = 0} \qquad (8)$$

y finalmente: si b = c = 0 tendremos que la expresión (1) será:

$$ax = 0$$

$$\boxed{x = 0} \qquad (9)$$

luego: los diagramas de una ecuación de primer grado con dos variables, careciendo de una de ellas y término independiente, son rectas que se confunden con los ejes de abscisas u ordenadas según sean nulos x o y, respectivamente.

Con ello agotamos todas las eventualidades de expresar gráficamente una ecuación de primer grado con dos variables y por ende la representación geométrica de una función racional entera de primer grado.-

Vemos entonces que: **toda ecuación de primer grado tiene siempre por diagrama una recta** como lo confirman las expresiones (4) a (9) inclusive, y que: dada una función de primer grado en forma implícita es posible llevarla a la forma explícita y viceversa, obteniéndose, en todos los casos, rectas por diagramas. Se comprende entonces la estrecha vinculación existente entre el presente parágrafo y los anteriores (III.2 y 3) y de allí entonces que indistintamente hablemos de función lineal o racional entera de primer grado (o simplemente de primer grado), o de ecuación de una recta.-

Los términos función lineal o de primer grado son los más apropiados para nuestro estudio pues con ellos estamos indicando la gráfica o el grado de la función, cárcterísticas esenciales de toda función. La terminología de ecuación de la recta es más usada por la Geometría Analítica o el Algebra.-

EJEMPLOS: a) Pasar a la forma explícita la función $3x - 2y + 5 = 0$. Despejando será: $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Representa una recta cuya pendiente es $m = \frac{3}{2}$ ($\alpha = 56^\circ 18'6$) y que corta al eje Oy en el punto $(0, \frac{5}{2})$.-
b) Idem a) con la función $3x - 1 = 0$. Despejando x tendremos: $x = \frac{1}{3}$ que gráficamente representa una recta paralela al eje Oy a una distancia de $\frac{1}{3}$.

EJERCICIOS: a) Pasar a la forma explícita y representar en un mismo gráfico las siguientes funciones:

$7x + 2y = 0$;	$x + y - 3 = 0$;	$3x - 2 = 0$
$5y + 1 = 0$;	$y - 5 = 8(x - 3)$;	$6x - 7y + 1 = 0$
$3(x + y) = 4$;	$2x - \frac{8}{5} = y$;	$x - 6(y + 3) = 0$

b) Dada la función $ax + by + c = 0$ ¿qué relación deben verificar a, b y c?- si:

1. la recta pasa por el origen — R : $c = 0$
2. la recta pasa por el punto (3 , 5) — R : $3a + 5b + c = 0$
3. la recta tiene pendiente $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — R : [illegible]
4. la recta pasa por (1 , 3) y es paralela al eje Ox. R: $a = 0$; $b + c = -2$
5. la recta pasa por (5 , 2) y es paralela al eje Oy. R: $b = 0$; $a + c = -4$

c) Representar graficamente y pasar a la forma implícita las ecuaciones:

$y = x + 3$; $y = \frac{2}{5} x - 3$; $y = -\frac{1}{5}$

$y = \frac{3}{7} x + \frac{2}{5}$; $y = \frac{3}{8} x - 2 - \frac{1}{4} x$; $y = 3(x - 1)$

$3(x - y) = 4x$; $x - \frac{5}{8} = 3y - 2$; $x = 3$

III.5.- Determinacion práctica de la función lineal.- En la práctica la ecuación de una recta puede determinarse facilmente si se conocen algunos datos como ser: uno o dos puntos cualesquieras que le pertenezcan, o bien su abscisa y ordenada al origen. Interesa saber como se calculan las coordenadas del punto de intersección de dos rectas cuyas ecuaciones nos son conocidas. En síntesis, es posible calcular la ecuación de una recta ya sea en función de uno o dos de sus puntos, o bien, en función de su abscisa y ordenada al origen, problemas estos de importancia práctica que pasamos a estudiar.

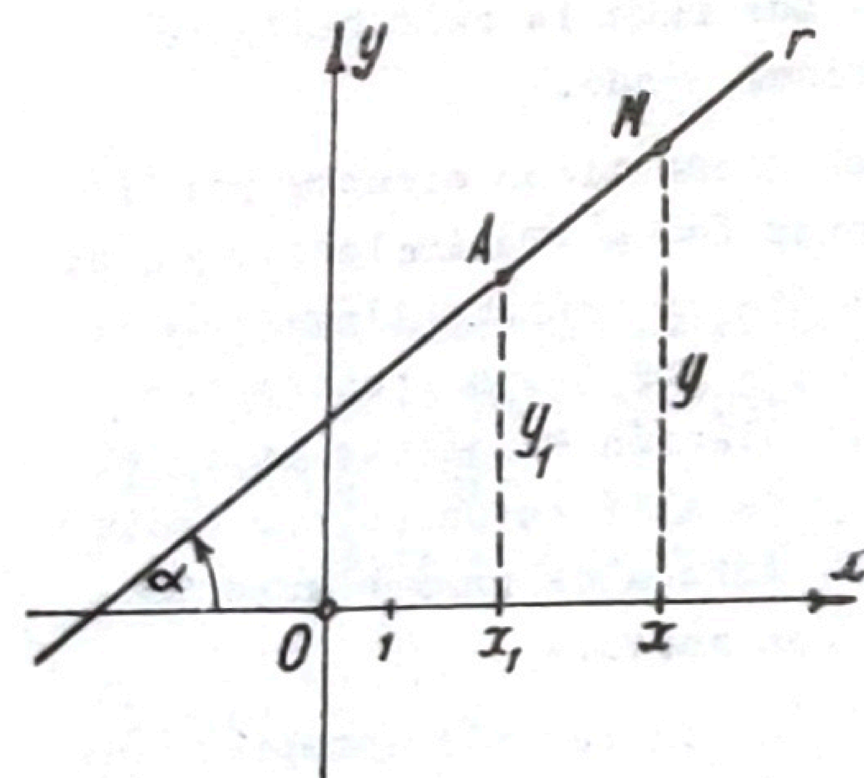
III.6.- Determinación de la ecuación de una recta en función de uno de sus puntos.- Sea una recta r de inclinación α que pasa por el punto $A(x_1, y_1)$ y consideremos en ella un punto genérico $M(x, y)$. Siendo el valor de la pendiente, para cualquier posición de M:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

resulta:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

ecuación que nos permite calcular la ecuación de una recta conocida su pendiente y uno de sus puntos. (figura III.11)



- figura III.11. -

EJEMPLOS: a) Determinar la ecuación de la recta que pasa por A(-3,5) y que tiene una inclinación de 30°. En tal caso es $m = \text{tg } 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y por lo tanto la ecuación es:

$$y - 5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3) \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3} x + (5 + \sqrt{3})$$

b) Ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ y que es perpendicular a la recta $y = 3x + 1$. En tal caso aplicamos la condición de perpendicularidad $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ y obtenemos $m_1 = -\frac{1}{3}$; luego la ecuación es

$$y + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2}) \quad ; \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$$

III.7.- Determinación de la ecuación de una recta en función de dos de sus puntos. (forma simétrica).- Sea una recta r de inclinación α que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$; consideremos en ella un punto genérico $M(x, y)$. Por contener al punto A, su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

pero como conocemos dos de sus puntos su pendiente m estará dada por la relación:

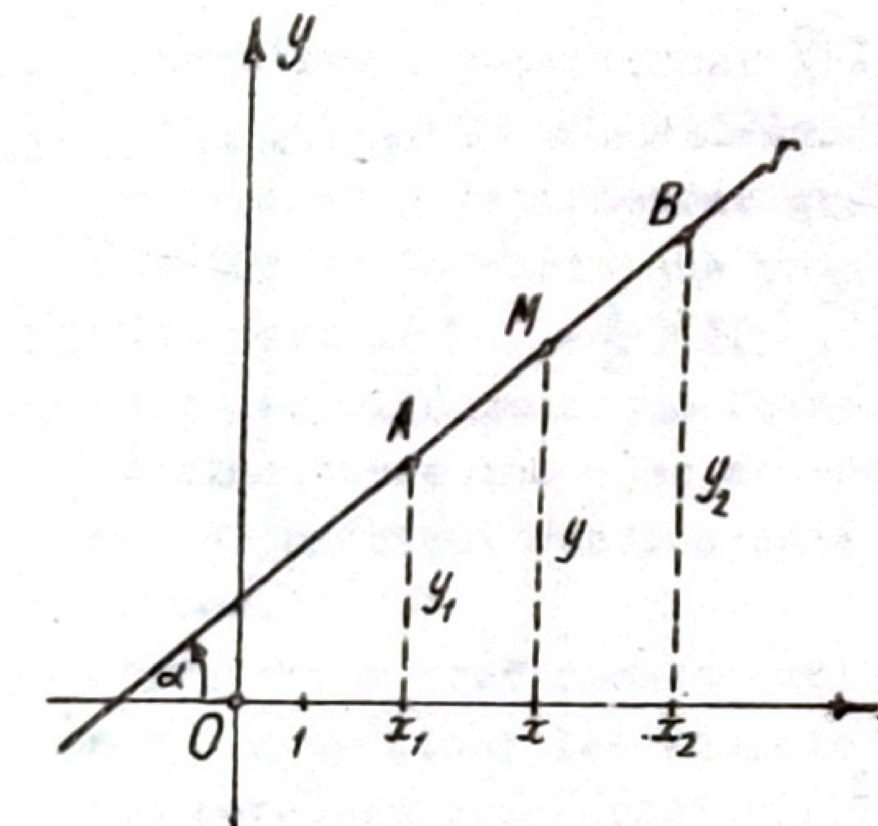
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

luego, reemplazando dicho valor en la expresión anterior tenemos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y ordenando obtenemos finalmente:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \quad (1)$$



- figura III.12. -

expresión que nos permite calcular la ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos, designada también bajo el nombre de forma simétrica.(figura III.12).

EJEMPLO: a) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{3}, -1)$ $B(-2, -\frac{1}{5})$. Aplicando la expresión ya conocida tenemos:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad \frac{y + 1}{-\frac{1}{5} + 1} = \frac{x - \frac{1}{3}}{-2 - \frac{1}{3}}$$

$$y = -\frac{12}{35} x - \frac{31}{35}$$

III.8.- Determinación de la ecuación de una recta en función de su abscisa y ordenada al origen (forma hessiana).- Sea r una recta que corta a los ejes coordenados en dos puntos distintos: $P(p, 0)$ y $Q(0, q)$, respectivamente situados sobre los ejes de abscisas y ordenadas.(figura III.13).

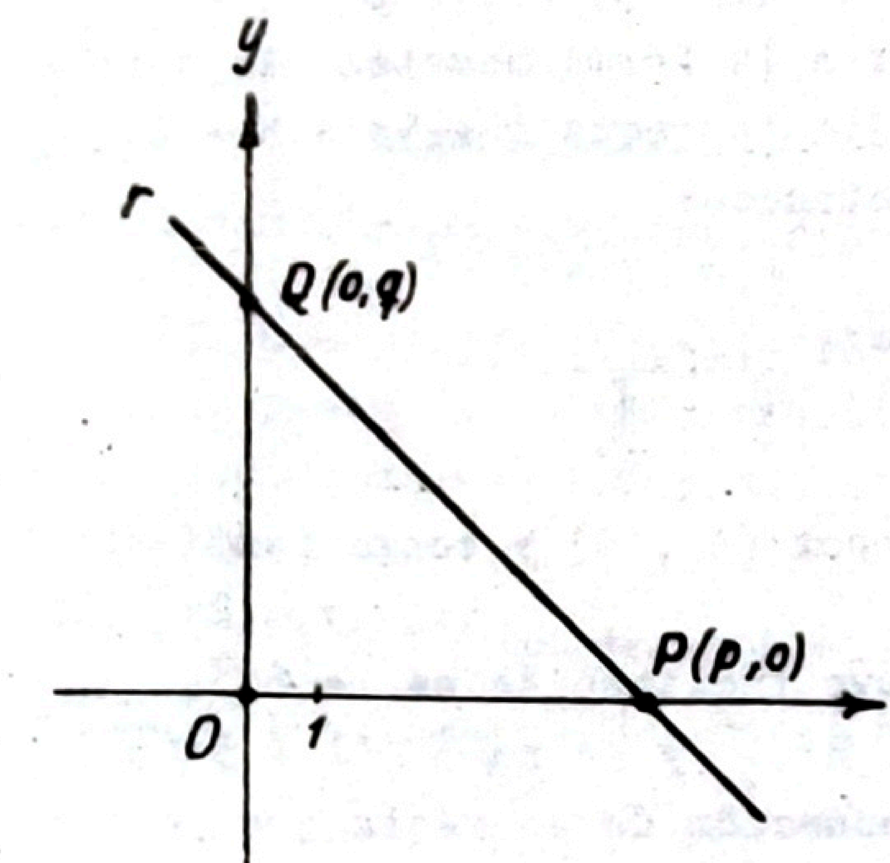
Tratemos de determinar la función lineal correspondiente. En virtud de la expresión (1) del parágrafo III.7. tendremos que:

$$\frac{y - 0}{q - 0} = \frac{x - p}{0 - p}$$

o sea:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

expresión que nos permite calcular la ecuación de una recta en función de su abscisa p y ordenada al origen q y que se conoce con el nombre de forma hessiana de la ecuación de una recta.



- figura III.13. -

El pasaje de la forma hessiana a la forma implícita se efectúa quitando denominadores e igualando a cero. En efecto de (1) deducimos que:

$$qx + py - pq = 0$$

Igualmente es posible el pasaje de la forma implícita a la hessiana. En efecto: sea

$$ax + by + c = 0$$

tendremos

$$ax + by = -c$$

dividiendo por $-c$ ha de ser

$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1$$

o sea que:

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

y haciendo:

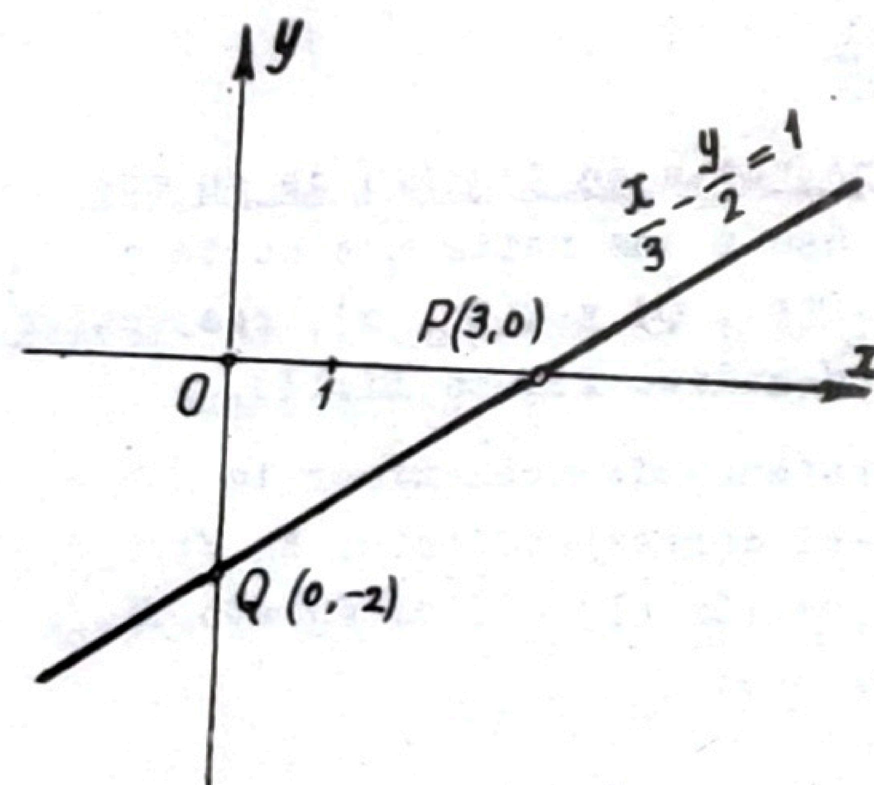
$$-\frac{c}{a} = p \quad ; \quad -\frac{c}{b} = q$$

resulta reemplazando en la expresión anterior que:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

que es la expresión buscada.

EJEMPLOS: a) Hallar la ecuación implícita de la recta que determina sobre los ejes coordenados los segmentos $p = 3$ y $q = -2$ (figura III.14).



- figura III.14. -

Reemplazando en la forma hessiana obtenemos:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

o sea:

$$2x - 3y = 6$$

y finalmente:

$$2x - 3y - 6 = 0$$

b) pasar a la forma hessiana la ecuación de la recta $x + 5y - 3 = 0$. Será entonces:

$$x = 5y = 3$$

o sea:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{5}} = 1$$

EJERCICIOS: a) Trazar la recta que pasa por $(3 , 5)$ y tenga pendiente 2.

R: $y = 2x - 11$

b) Trazar la recta que pase por $(-5 , 1)$ y cuya inclinación es $= 60^\circ$.

R: $y = x\sqrt{3}\ (1 + 5\sqrt{3})$

c) Determinar y representar graficamente la ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{1}{3} , -5)$ y es paralela a la recta $x + 3y - 2 = 0$

R: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{44}{9}$

d) Determinar y representar utilizando el esquema anterior la ecuación de la recta que pasa por $M(-3 , 2)$ y que es perpendicular a la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

R: $y = \frac{2}{3}x + 4$.

e) Determinar y representar graficamente la ecuación de la mediatriz del segmento $A(3 , -2)$ $B(-5 , 2)$.

R: $y = 2x + 2$.

f) Determinar y representar graficamente utilizando el esquema anterior la ecuación de la recta que pasa por $A(2 , 0)$ $B(-2 , 5)$ R: $x = -2$

g) Idem para $A(\frac{1}{3} , -\frac{1}{2})$ $B(5 , 3)$.

h) Calcular el ángulo que forma la recta $A(2 , 0)$ $B(0 , 3)$ con la recta que determina sobre los ejes coordenados los segmentos $p = 3$ y $q = 1$. Representar el problema graficamente utilizando el esquema de los ejercicios anteriores.

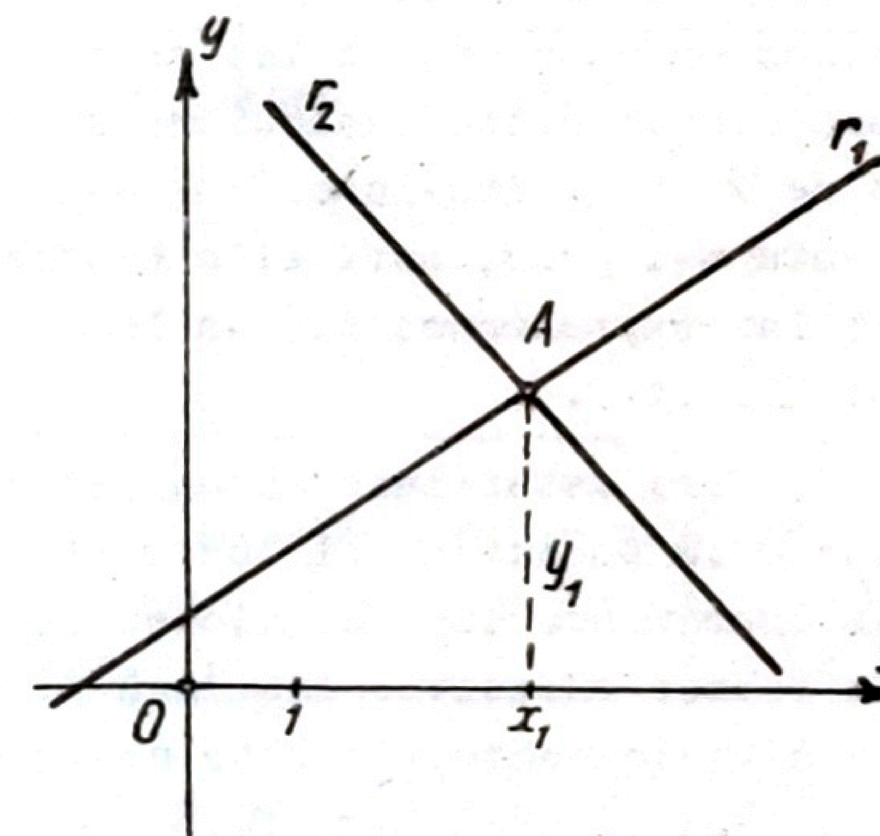
R: $\alpha = 37^\circ 52'5$

i) Representar graficamente utilizando el esquema de los ejercicios anteriores y determinar las ecuaciones de las rectas que pasan por el origen y son paralela y perpendicular respectivamente a la recta $p = 2$ y $q = 3$.

R: $y = -\frac{3}{2}x$; $y = \frac{2}{3}x$

III.9.- Intersección de dos rectas.- Sean r_1 y r_2 dos rectas que se cortan en un punto $A(x_1 , y_1)$ y cuyas respectivas ecuaciones son:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$



- figura III.15. -

Como el punto A pertenece a la recta r_1 sus coordenadas verifican la primera ecuación, pero también verifican la segunda pues A pertenece a r_2. Luego: las coordenadas x_1 e y_1 del punto dado son las raíces del sistema formado por las ecuaciones dadas. (figura III.15).

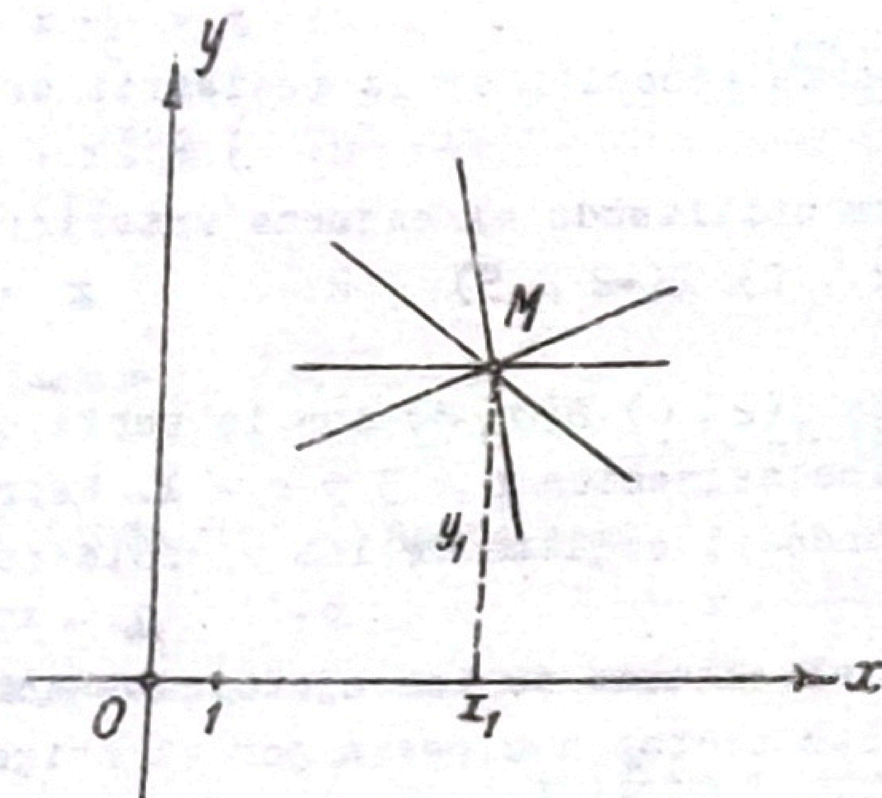
Por lo tanto: el problema geométrico de determinar la intersección de dos rectas se resuelve algebraicamente calculando las raíces del sistema formado por las ecuaciones de las rectas dadas. En la práctica es conveniente pasar las funciones a su forma explícita y resolver el sistema por igualación o determinantes.

III.10.- Haz de rectas.- Por GEOMETRIA PLANA sabemos que por un punto de un plano pasan infinitas rectas. Llamaremos haz de rectas al conjunto de ellas que se cortan en un punto fijo o bien que son paralelas a una dirección fija.

En efecto: consideremos el sistema de infinitas rectas que pasan por el punto $M(x_1 , y_1)$.(figura III.16). La ecuación de cada una de estas rectas es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la pendiente de cada una de las rectas del sistema y x_1 e y_1 las coordenadas del punto fijo M.



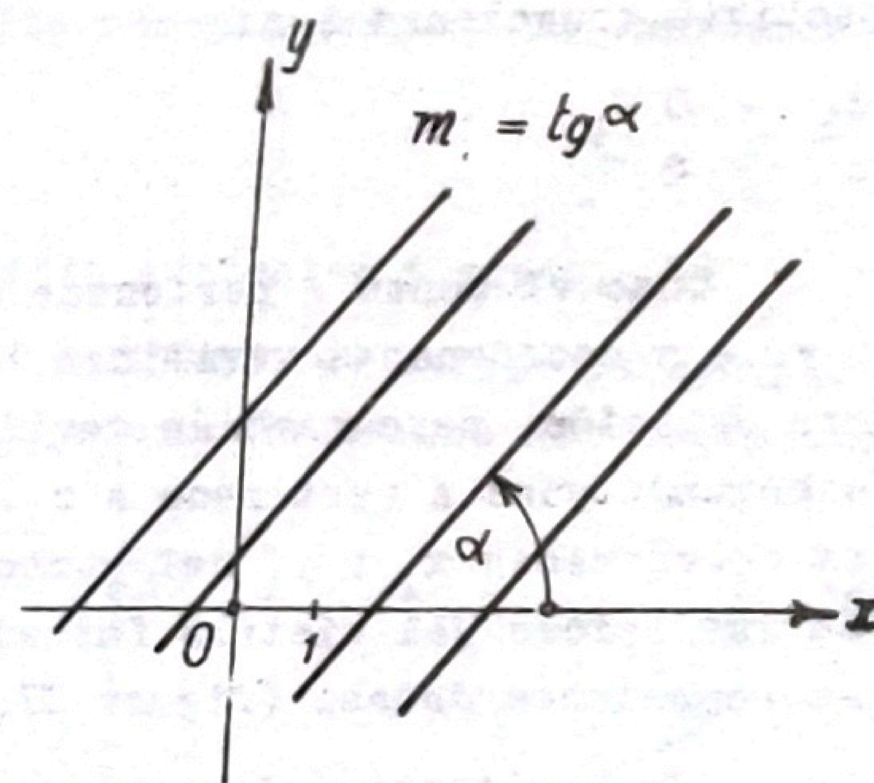
- figura III.16. -

En cambio, la ecuación que responde al sistema constituído por rectas que son paralelas a una dirección fija es:

$$y = mx + n$$

donde n (ordenada al origen) caracteriza a cada una de las rectas del sistema y m es, ahora, pendiente común de todas ellas. (figura III.17).

El haz de rectas más simple es el constituído por dos rectas y el problema que frecuentemente se presenta en la práctica es el de calcular sus ecuaciones en función del punto fijo, o viceversa, problema que ya hemos resuelto en el parágrafo III.9.-



- figura III.17. -

Facilmente se comprende que si en un plano coordenado fijamos mediante sus coordenadas x e y la posición del punto fijo M de un haz, sus ecuaciones podrán determinarse rapidamente conociendo en cada una de las rectas del conjunto un punto cualquiera N, distinto de M, o su inclinación α -su pendiente m-, pues, para ello bastará aplicar las expresiones (1) de los parágrafos III.6.y 7.

Para determinar en un plano coordenado la posición del punto fijo de un haz conociendo las ecuaciones de las rectas que lo constituyen se acostumbra a formar sucesivos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas y resolverlos algebraicamente. En este orden de ideas el problema más simple es el que vimos en el parágrafo III.9. donde calculamos las coordenadas del punto fijo del haz de rectas r_1 y r_2 en función de sus ecuaciones.

Ahora bien, si al efectuar el cálculo de las raíces del sistema se desprende que:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

es decir, si las rectas no son paralelas entre sí, la REGLA DE CRAMER nos da la solución única y las expresiones:

$$(1) \qquad x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad ; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (2)$$

nos determinan las coordenadas del punto fijo.-

En cambio si:

$$a_1b_2 = a_2b_1$$

es decir si a_1 y b_1 son respectivamente proporcionales a a_2 y b_2 las rectas son paralelas. Finalmente si:

$$a_1c_2 = a_2c_1 \quad ; \quad b_1c_2 = b_2c_1 \quad ; \quad a_1b_2 = a_2b_1$$

es decir si todos los coeficientes son proporcionales, las rectas son coincidentes.

El paralelismo se justifica porque al reemplazar los valores en las expresiones (1) y (2) los numeradores resultan no nulos y el denominador cero. La coincidencia (caso particular de paralelismo) se ve también justificada pues el reemplazo de valores en dichas expresiones da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Si las rectas se cortan existe una única solución, si son paralelas no existe solución y si son coincidentes hay infinitas soluciones.

Estas consideraciones nos permiten expresar la relación entre la posición de las rectas y el número de soluciones del sistema de ecuaciones que se presente en el cuadro siguiente:

POSICION DE LAS RECTAS	NUMERO DE SOLUCIONES DEL SISTEMA	RELACION ENTRE COEFICIENTES
Las rectas se cortan	una única solución	$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
Las rectas son paralelas	no existe solución	$a_1b_2 = a_2b_1$
Las rectas coinciden	infinitas soluciones	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

EJEMPLOS: a) Determinar la intersección de la recta A(5 , 0) B(3 , 2) con la recta que pasa por P(1 , -2) y de pendiente $\frac{1}{3}$. La ecuación de la primera recta es:

$$\frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 5}{3 - 5} \quad \text{de donde} \quad y = -x + 5$$

La ecuación de la segunda recta es:

$$\frac{y + 2}{x - 1} = \frac{1}{3} \quad \text{de donde} \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$

Formemos el sistema con las ecuaciones halladas, tendremos:

$$y = -x + 5$$
$$y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$

cuyas soluciones son $x = \frac{11}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$, coordenadas del punto de intersección buscado.

EJERCICIOS: a) Representar gráficamente y determinar las intersecciones de las rectas que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 4x + 6y + 9 = 0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{R: } (2 , 3)$$

b) Representar gráficamente y determinar con los ejes coordenados la intersección de las rectas:

$ax + by + c = 0$ R : $(-\frac{c}{a}, 0)$ y $(0, -\frac{c}{b})$

$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ R : $(3, 0)$ y $(0, -2)$

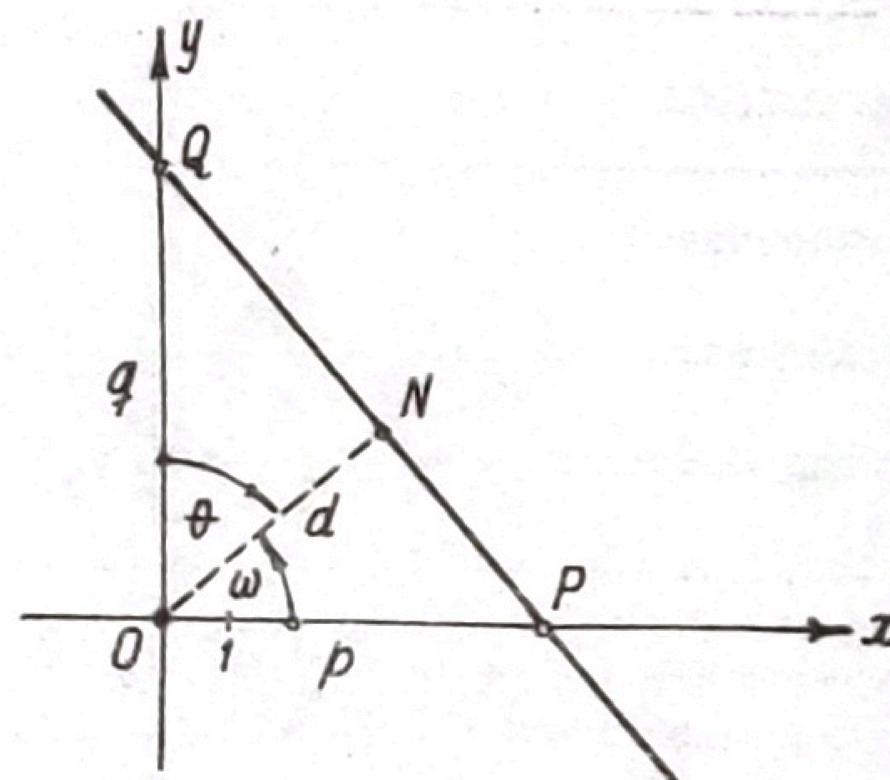
$3x + 2y - 5 = 0$ $(\frac{5}{3}, 0)$ y $(0, \frac{5}{2})$

c) ¿Cuál es la proyección del punto P(7 , 5) sobre la recta A(1 , 5) B(9 , -3)? Comprobar gráficamente. R : (4 , 2)

d) Determinar en el triángulo A(-1 , 7) B(-6 , 2) C(4 , 2) el punto de intersección de las medianas. Comprobar el resultado obtenido gráficamente. R : $(-1, \frac{11}{3})$

e) Determinar los vértices del triángulo de lados $r_1)$ $y - 2 = 0$; $r_2)$ $\frac{x}{-8} + \frac{y}{8} = 1$; $r_3)$ $x + y - 6 = 0$ R : A(-1 , 7) , B(-6 , 2) , C(4 , 2)

III.11.- **Forma normal de la ecuación de la recta.-** Sea una recta que corta a los ejes coordenados en los puntos P(p , 0) y Q(0 , q). Tracemos por el origen del sistema de coordenadas su normal; obtendremos el punto N (figura III.18).



- figura III.18. -

Llamemos d a la distancia $\overline{ON}$ entre el origen y la recta dada y ω a la inclinación de su perpendicular por O. La ecuación de la recta es:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (1)$$

pero como:

$$p = \overline{OP} = \frac{\overline{ON}}{\cos\omega} = \frac{d}{\cos\omega} \quad (2)$$

$$q = \overline{OQ} = \frac{\overline{ON}}{\cos\theta} = \frac{d}{\operatorname{sen}\omega} \quad (3)$$

pues $\omega + \theta = \frac{\pi}{2}$, resulta reemplazando las expresiones (2) y (3) en (1) que:

$$\frac{x}{\frac{d}{\cos\omega}} + \frac{y}{\frac{d}{\operatorname{sen}\omega}} = 1$$

o sea:

$$\boxed{x\cos\omega + y\operatorname{sen}\omega = d}$$

llamada forma normal de la ecuación de la recta.

Para reducir una ecuación dada en la forma implícita a la normal es necesario que los respectivos coeficientes sean proporcionales, es decir que se verifique que:

$$\frac{\cos\omega}{a} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{b} = \frac{-d}{c} = k$$

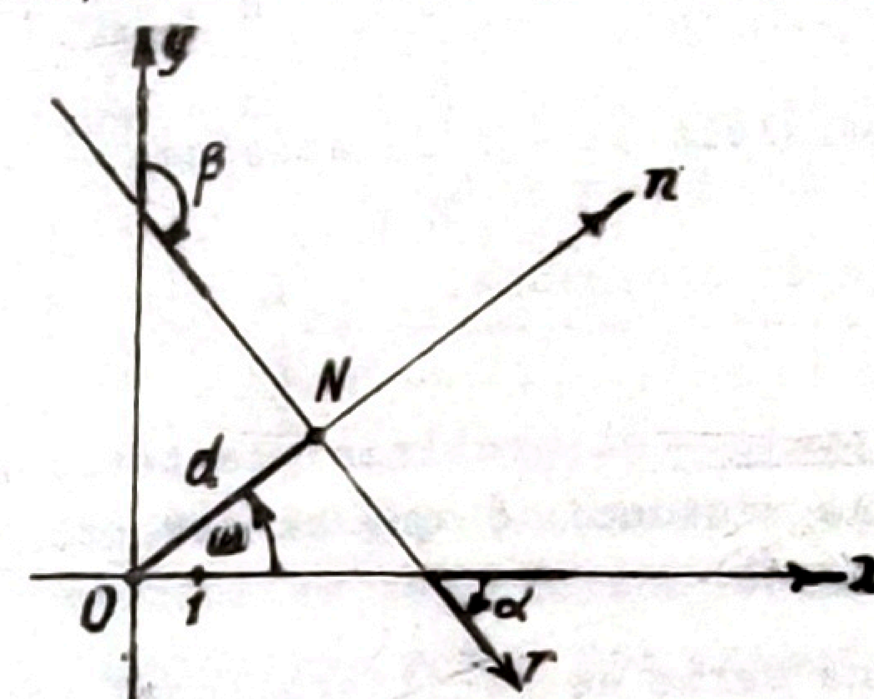
o sea que:

$$\cos\omega = k.a \quad ; \quad \operatorname{sen}\omega = k.b \quad ; \quad -d = k.c$$

donde, dado que:

$$\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega = 1 \quad \text{será} \quad k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

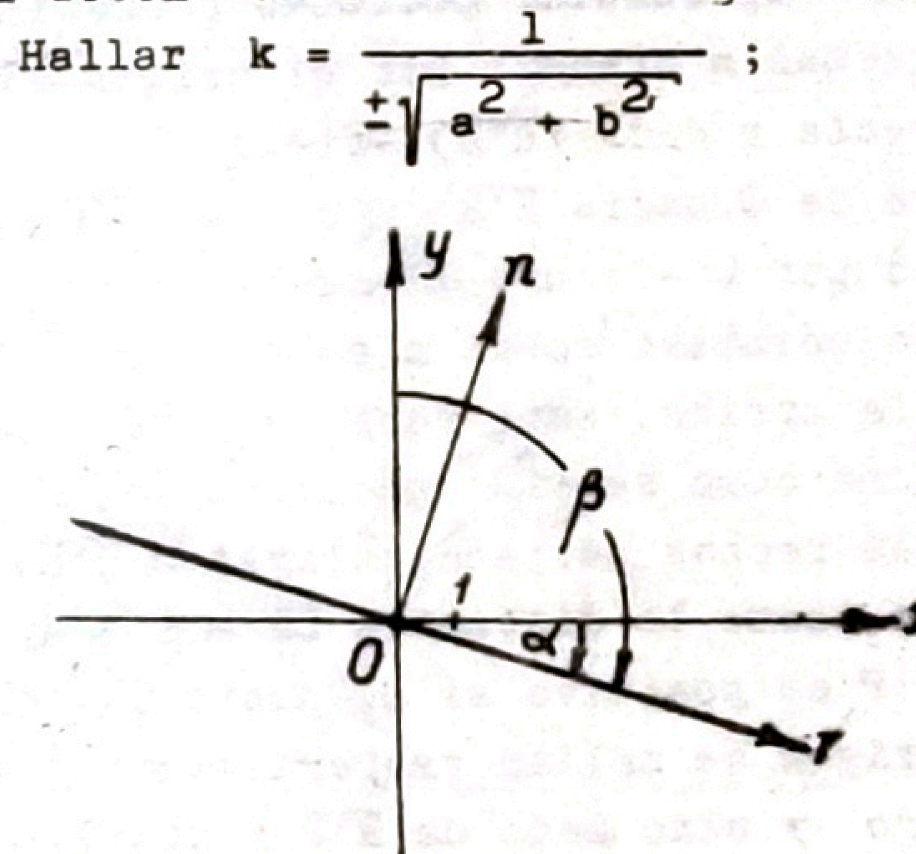
La ecuación $-d = k.c$ nos **indica cual es el signo que debe afectar al radical**, pues siendo d **positivo, k y c deberán tener signos contrarios.** Si **c = 0, resulta d = 0** (en tal caso α y β difieren en $\frac{\pi}{2}$), y dado que en tal circunstancia $\omega < \pi$, dado que cuando d = 0 suponemos siempre que ω es inferior a π y que la dirección positiva de **n es siempre hacia arriba (figura III. 19 y 20), tendremos que, como senω es positivo, k y b deben tener el mismo signo.**



- figura III.19.

Resumiendo por lo tanto, para reducir **ax + by + c = 0** a la forma normal deben realizarse las siguientes operaciones:

a) Hallar $k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$;



- figura III.20.-

b) Dar al resultado anteriormente hallado el signo opuesto de c o si c=0 el mismo signo de b;

c) Hallar $\cos\omega = k.a$; $\operatorname{sen}\omega = k.b$ y $-d = k.c$;

d) Sustituir los valores así hallados en la ecuación $x.\cos\omega + y.\cos\omega - d = 0$

EJEMPLOS: a) Dada la ecuación $6x - 3y + 2 = 0$ hallar la ecuación normal que la represente. Tendremos:

a) $k = \frac{1}{\pm\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{45}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{15}$;

b) Como: $-d = k.c$ será $-d = k(+2)$ y como $c = +2$ tendrá que ser, en consecuencia, k negativo para que d resulte positivo (recordar que siempre $d > 0$), o sea que $k = -\frac{\sqrt{5}}{15}$;

c) Resultará entonces: $\cos\omega = -\frac{\sqrt{5}}{15}.6$; $\operatorname{sen}\omega = -\frac{\sqrt{5}}{15}(-3) = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $d = -\frac{\sqrt{5}}{15}\,2$

d) La ecuación buscada será: $-\frac{2}{5}\sqrt{5}\,x + \frac{\sqrt{5}}{5}\,y - \frac{2}{15}\sqrt{5} = 0$

EJERCICIOS: a) Hallar las ecuaciones y construir las rectas para las cuales:

1. $\omega = \frac{\pi}{4}$; $d = 3$ R : $\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y - 6 = 0$
2. $\omega = \frac{3\pi}{2}$; $d = 3$ R : $y + 3 = 0$

b) Reducir la ecuación $5x - 3y + 2 = 0$ a la forma normal; hallar d y ω, y efectuar la representación gráfica.

R : $d = \frac{2}{\sqrt{34}}$; $\omega = \text{arc sen}\,\frac{3}{\sqrt{34}}$

c) Idem b) con la ecuación $8x + 6y + 1 = 0$

R : $d = \frac{1}{10}$; $\omega = \text{arc sen}\,(-\frac{7}{10})$

d) Hallar la longitud de la perpendicular al origen de la recta $3x + 2y + 5 = 0$. R : $d = \frac{5}{13}\sqrt{13}$

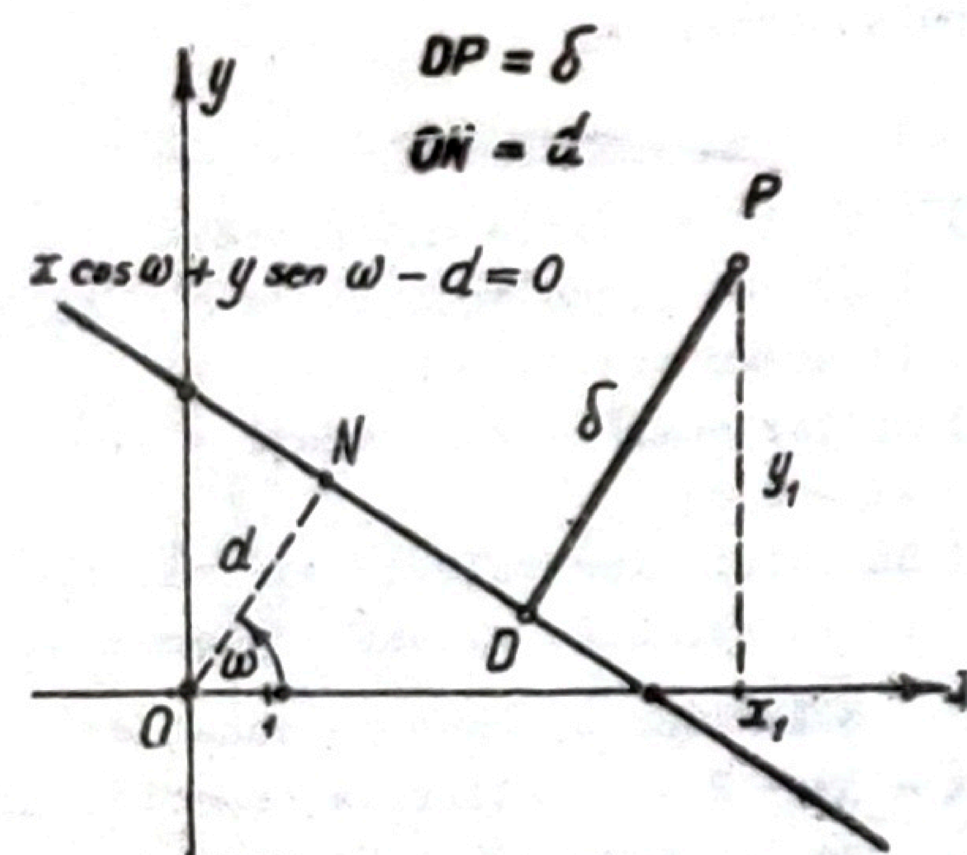
e) Idem d) para $3x - 2y - 1 = 0$ R : $d = \frac{1}{13}\sqrt{13}$

f) Hallar la forma normal de una recta paralela al eje de abscisas. R : $y = d$

g) Idem f) para una recta paralela al eje de ordenadas. R : $x = d$

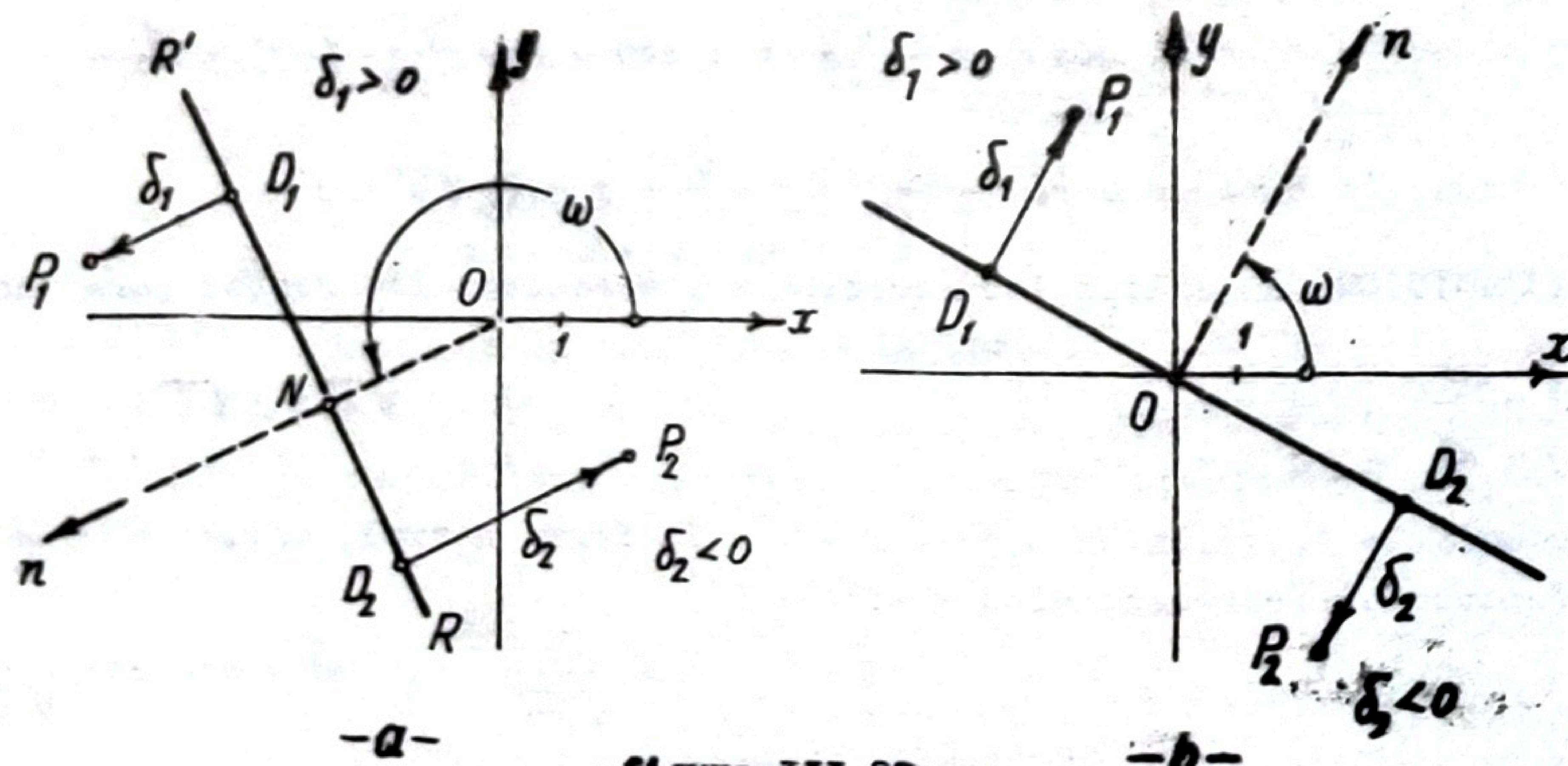
III.12.- <u>Distancia de una recta a un punto.-</u> El problema planteado es: **dada una recta r y un punto P, calcular la distancia δ que existe del punto P a la recta r considerada.** (figura III.21).

Antes de entrar en materia haremos una serie de consideraciones acerca de los signos que usaremos para expresar la distancia $\overline{DP} = \delta$.



- figura III.21. -

El sentido positivo sobre la normal n trazada por el origen a la recta r dada ($\overline{R'R}$) -figura III.22-a- va de O hacia $\overline{R'R}$ y cuando $\overline{R'R}$ pasa por O -figura III.22-b- el sentido positivo sobre n es el que va hacia arriba. Este sentido positivo se toma como sentido positivo de todas las rectas perpendiculares a $\overline{R'R}$. Por lo tanto **la distancia $\overline{DP} = \delta$ de r a P es positiva si el punto P y el origen se hallan respectivamente a uno y otro lado de $\overline{R'R}$ y negativa si P y el origen se encuentran a un mismo lado de $\overline{R'R}$. Cuando $\overline{R'R}$ pasa por el origen, la distancia de r a P es positiva si se encuentra dirigida hacia arriba y negativa si está dirigida hacia abajo.** De tal forma en la figura III.22-a la distancia de r a P_1 es positiva y en la figura III.22-b de r a P_2 es negativa.



- figura III.22. -

Ahora bien: sea $\overline{R'R}$ la recta dada (figura III.23) y $\overline{ON} = d$ su distancia al origen. Tendremos que:

$$\text{Proy}_n\overline{OP} = \text{Proy}_n\overline{OQ} + \text{Proy}_n\overline{QP} \qquad (1)$$

pero como:

$$\text{Proy}_n\overline{OP} = \overline{OP'} = d + \delta$$
$$\text{Proy}_n\overline{OQ} = \overline{OQ'} = \overline{OQ}\,.\cos\omega = x_1\,.\cos\omega$$
$$\text{Proy}_n\overline{QP} = \overline{Q'P'} = QP\,.\cos(90^\circ - \omega) = y_1\,.\,\text{sen}\,\omega$$

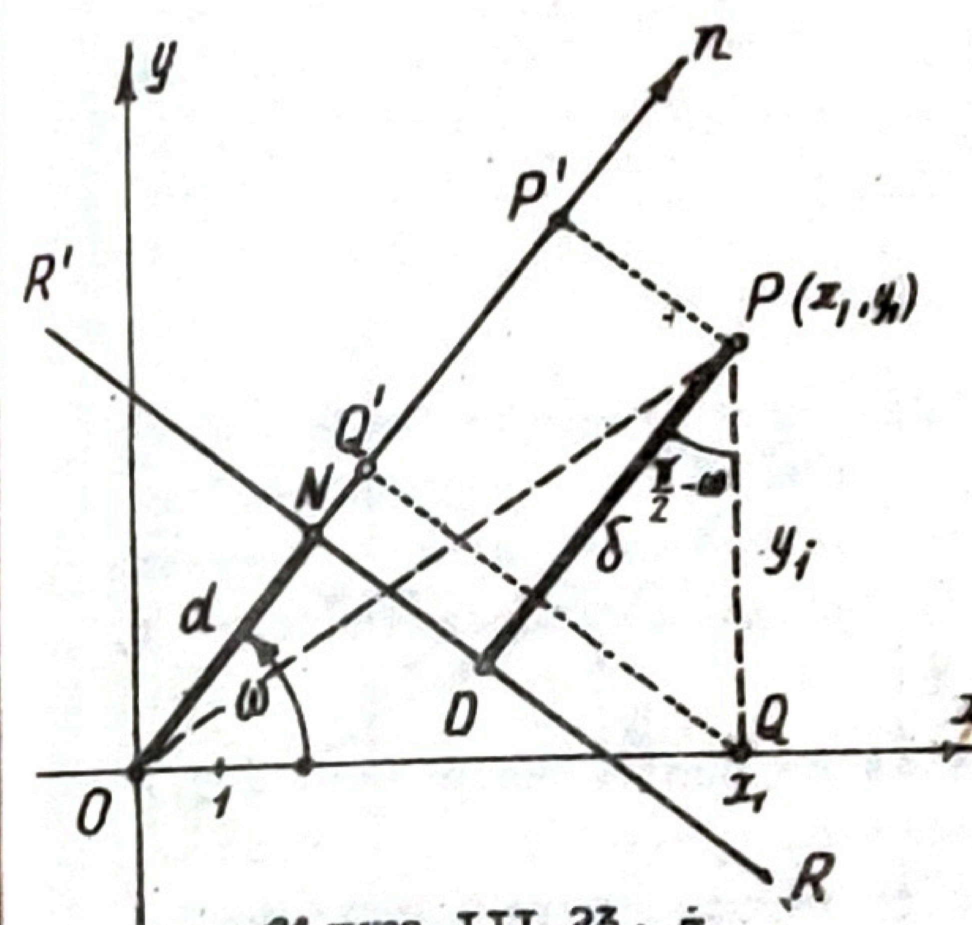
reemplazando estos valores en la expresión (1) obtenemos

$$d + \delta = x_1\,.\cos\omega + y_1\,.\,\text{sen}\,\omega$$

de donde:

$$\boxed{\delta = x_1\,.\cos\omega + y_1\,.\,\text{sen}\,\omega - d}$$

Luego: **para hallar la distancia de una recta a un punto dado:**
a) **debe expresarse la ecuación de la recta en forma normal;**
b) **debe sustituírse x e y del primer miembro de la ecuación por las coordenadas del punto dado. El resultado así obtenido será la distancia buscada.**



- figura III.23. -

EJEMPLOS: a) Hallar la distancia de la recta $3x - 2y + 6 = 0$ al punto $(3\,,2)$. De acuerdo con lo expresado en a) tendremos que la ecuación $3x - 2y + 6 = 0$ expresada en forma normal será:

$$\begin{cases}\cos\omega = k.3\\ \text{sen}\,\omega = -k.2\\ d = k.6\end{cases}$$

por lo tanto como:

$$\cos^2\omega + \text{sen}^2\omega = 1$$

tendremos:

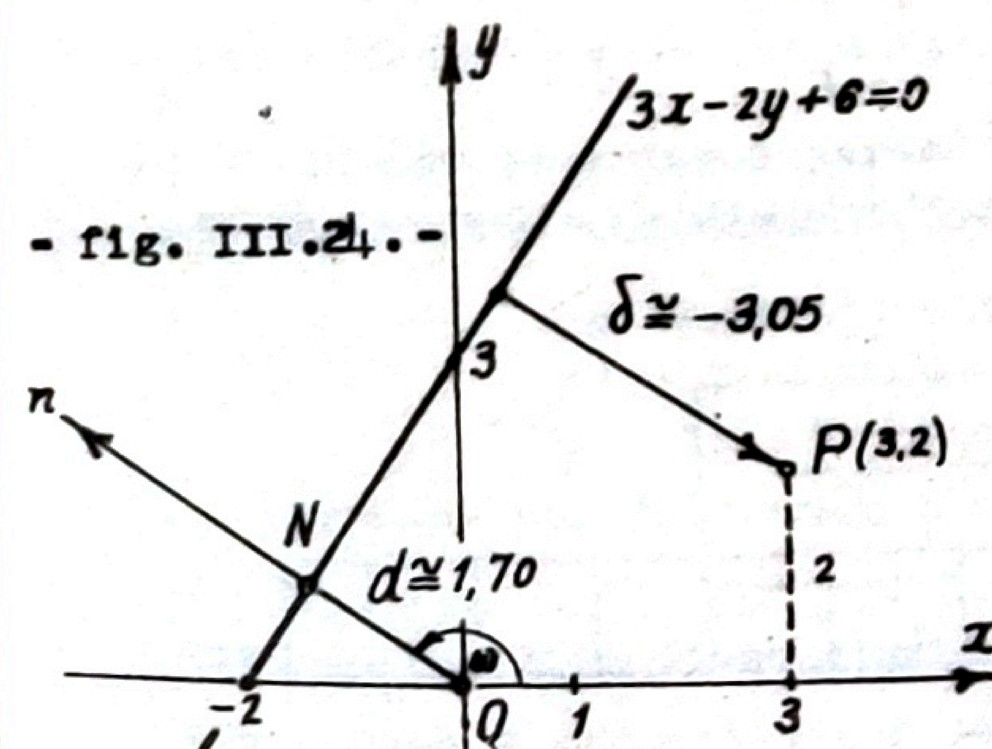
$$(3.k)^2 + (-2.k)^2 = 1$$
$$9.k^2 + 4.k^2 = 1$$

luego: $k = \pm\frac{\sqrt{13}}{13}$ y como $d = k.6 < 0$ será: $k = -\frac{\sqrt{13}}{13}$ con lo que ha de ser $d = -\frac{6}{13}\sqrt{13}$ y entonces: $\cos\omega = -\frac{3}{13}\sqrt{13}$; $\text{sen}\,\omega = \frac{2}{13}\sqrt{13}$; finalmente la ecuación normal será:

$$-\frac{3}{13}\sqrt{13}\,.\,x + \frac{2}{13}\sqrt{13}\,.\,y - \frac{6}{13}\sqrt{13} = 0$$

Sustituyendo x e y por las coordenadas 3 y 2 del punto dado resulta:

$$\delta = -\frac{9}{13}\sqrt{13} + \frac{4}{13}\sqrt{13} - \frac{6}{13}\sqrt{13} \cong -3{,}05\,.$$



- fig. III.24. -

La representación gráfica del problema la apreciamos en la figura III.24.

EJERCICIOS: a) Hallar la distancia de la recta $x.\cos 30^\circ + y.\text{sen}\,30^\circ - 5 = 0$ al punto $P\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\,,\,6\right]$ R : $\delta = -1$

b) Hallar la distancia de la recta $6x + 2y - 5 = 0$ al punto $P\left[\frac{10}{3}\,,\,10\right]$ R : $\delta = \frac{7}{4}\sqrt{10}$

c) Hallar la distancia de la recta $\frac{x}{2} - \frac{2}{3}y = 1$ al punto P(5 , 6).

R: $\delta = -2$

d) Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas r_1) $2x - 5y + 3 = 0$ y r_2) $x + 5y - 1 = 0$. Efectuar la representación gráfica correspondiente.

R : $x - 10y + 4 = 0$ y $x = -\frac{2}{3}$

e) Demostrar que la suma de las distancias de los lados de un triángulo isósceles a un punto cualquiera de la base es constante. **Advertencia**: tomar el punto medio de la base como origen y la base misma como eje de abscisas.

f) Hallar el lugar geométrico de los puntos que se encuentran k veces más alejados de $4x - 3y + 1 = 0$ que de $5x - 12y = 0$.

R : $(52 - 25k)x \mp (39 - 60k)y + 13 = 0$

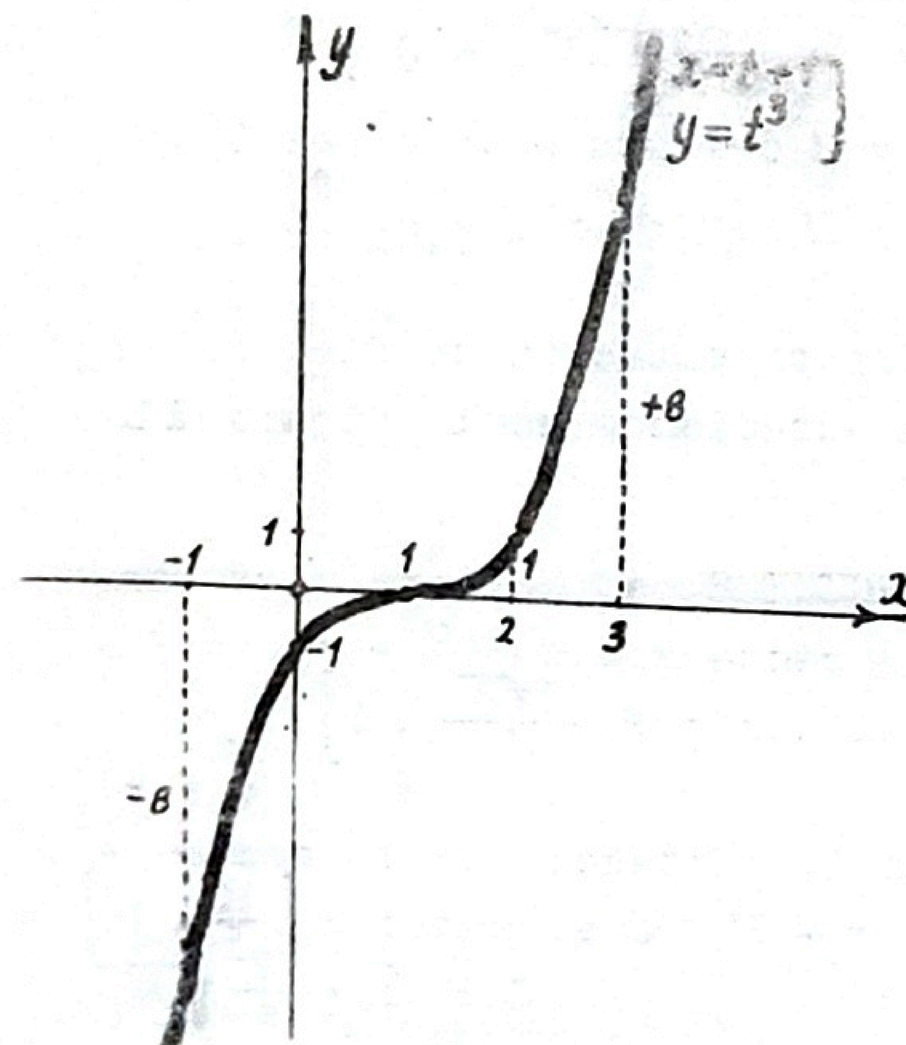
g) ¿La recta $x - 5y - 2 = 0$ pasa entre el punto (1 , 0) y el punto (-1 , 2)?

h) Hallar la distancia entre las rectas r_1) $y = mx + n$; r_2) $y = mx - n$; decir que característica poseen las mismas

R : $\delta = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + m^2}}$ y son rectas paralelas

III.13.- <u>Ecuaciones paramétricas de una curva.-</u> En el parágrafo I.5. definimos a las funciones paramétricas como aquellas en que la relación de dependencia entre la función y la variable independiente aparece expresada a través de una tercer variable auxiliar que, designándose con la letra t, recibe el nombre de parámetro.

Supongamos ahora que las coordenadas **x,y** de un punto cualquiera **P** del plano coordenado sean funciones de un parámetro **t**, o sea que: **x = f(t)** e **y = g(t)**. Es evidente que para cada valor del parámetro **t** se tendrá un par de valores (x , y) que pueden considerarse como coordenadas del punto dado P y luego al variar t el punto P también variará. En consecuencia: **el conjunto de puntos cuyas coordenadas están dadas por las funciones (x , y) al variar t forman una curva dada por sus ecuaciones paramétricas.**



- figura III.25. -

Para construir una curva dada por sus ecuaciones paramétricas hemos de asignar distintos valores al parámetro para obtener los respectivos valores de las abscisas y ordenadas de los puntos.

En efecto: sea la función paramétrica:

$$x = f(t) = t + 1$$
$$y = g(t) = t^3$$

dando al parámetro **t** los valores:

...	-2	-1	0	1	2	3	...

obtenemos los respectivos pares de valores:

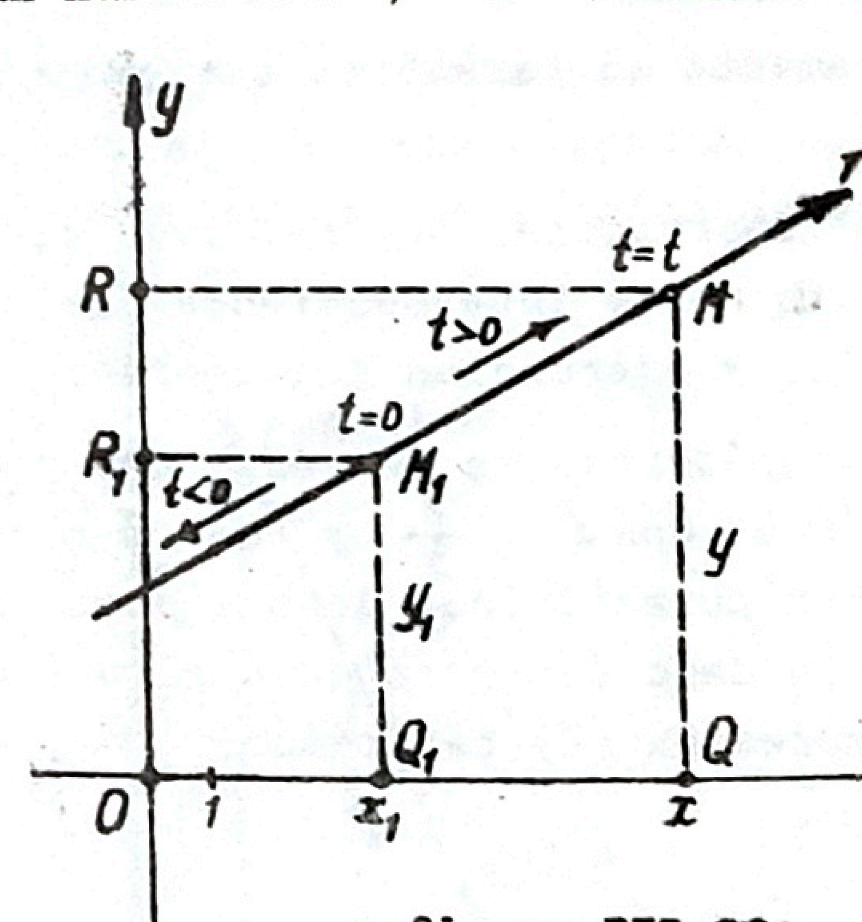
x	...	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	-8	-1	0	1	8	27	...

que nos permiten construir la curva que se aprecia en la figura III.25.-

En este caso es sencilla la transformación de la función paramétrica a una expresión cartesiana, pues, en efecto: basta despejar t en la primera ecuación y reemplazar el valor así obtenido en la segunda, resultando:

$$y = (x - 1)^3$$

III.14.- **<u>Ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta.-</u>** Consideremos una recta **r**, dada por uno de sus puntos $M_1(x_1 , y_1)$ y por sus ángulos directores α y β.(figura III.26). Sea **M(x , y)** un punto de **r**, distinto de M_1 y consideremos al segmento orientado de **r** que tiene origen en M_1 con su signo correspondiente; si hacemos a $t = \overline{M_1M}$ se verificará que $t \gtreqless 0$, o sea que t es un número real, mayor, menor o igual a cero.



- figura III.26 -

Proyectemos $\overline{M_1M}$ sobre los ejes coordenados; recordando que la proyección de un segmento sobre un eje es igual al módulo del segmento multiplicado por el coseno director correspondiente tendremos:

$$\text{Proy } \overline{M_1M}_{\overline{Ox}} = /\overline{M_1M}/ . \cos\alpha = t . \cos\alpha$$

$$\text{Proy } \overline{M_1M}_{\overline{Oy}} = /\overline{M_1M}/ . \cos\beta = t . \cos\beta$$

pero como:

$$\text{Proy } \overline{M_1M}_{\overline{Ox}} = \overline{Q_1Q} = x - x_1$$

$$\text{Proy } \overline{M_1M}_{\overline{Oy}} = \overline{R_1R} = y - y_1$$

resultará igualando que:

$$\begin{cases} x - x_1 = t . \cos\alpha \\ y - y_1 = t . \cos\beta \end{cases} \qquad (1)$$

o sea:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + t . \cos\alpha \\ y = y_1 + t . \cos\beta \end{cases}} \qquad (2)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta en donde x_1, y_1, los cosenos directores son números dados y t es el parámetro.

Si en la expresión (1) eliminamos el parámetro nos queda:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta}} \qquad (3)$$

que son las **ecuaciones simétricas** de la recta.

En la práctica en lugar de darse la recta por sus ángulos o cosenos directores se dan números reales proporcionales a dichos cosenos directores; o sea:

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha = k.a = A \\ \cos\beta = k.b = B \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad k = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

luego: reemplazando la expresión (4) en (2) expresamos las **ecuaciones paramétricas de la recta:**

$$\begin{cases} x = x_1 + At \\ y = y_1 + Bt \end{cases} \qquad (5)$$

y reemplazando la expresión (4) en (3) tenemos como expresión de las **ecuaciones simétricas de la recta** las siguientes:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} \qquad (6)$$

Para concluir digamos que, **geométricamente el parámetro t expresa la longitud variable orientada** $\overline{M_1M}$.

El estudio de estas ecuaciones tiene importancia para resolver el cálculo de distancias de un punto de una recta a sus intersecciones con una circunferencia como veremos en los ejemplos y ejercicios siguientes.

EJEMPLOS: a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen y **cuyos** cosenos directores son: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ y $\cos\beta = \frac{1}{3}$.-

Como para poder escribir las ecuaciones paramétricas de una recta necesitamos conocer las coordenadas de un punto dado (en este caso el origen 0) y los cosenos directores, aplicando la expresión (2) tendremos:

$$\begin{cases} x = 0 + \frac{2}{3}\,t \\ y = 0 + \frac{1}{3}\,t \end{cases}$$

que son las ecuaciones pedidas.

b) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $M_1(-2\,,\,5)$ y cuyos cosenos directores son: $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ y $\cos\beta = -\frac{3}{5}$. En este caso tendremos como ecuaciones paramétricas pedidas:

$$\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{5}\,t \\ y = 5 - \frac{3}{5}\,t \end{cases}$$

c) Dadas las ecuaciones: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ hallar los cosenos directores de la recta correspondiente. Tendremos que los cosenos pedidos son proporcionales a los coeficientes de t, o sea:

$$\cos\alpha = k.2 = 2k$$
$$\cos\beta = k.(-5) = -5k$$

como: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ será: $(2k)^2 + (-5k)^2 = 1$, o sea: $4k^2 + 25k^2 = 1$;

de donde: $k = \frac{1}{\sqrt{29}}$ y por lo tanto:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$
$$\cos\beta = \frac{-5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

d) Dadas las ecuaciones $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$ hallar las ecuaciones simétricas. Siendo:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - t \end{cases} \quad \text{resulta} \quad \begin{cases} t = x - 1 \\ t = -y + 5 = \frac{y - 5}{-1} \end{cases}$$

luego:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 5}{-1}$$

por lo tanto:

$$\cos\alpha = k.a = k.(1) = k$$
$$\cos\beta = k.b = k.(-1) = -k$$

o sea: $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego:

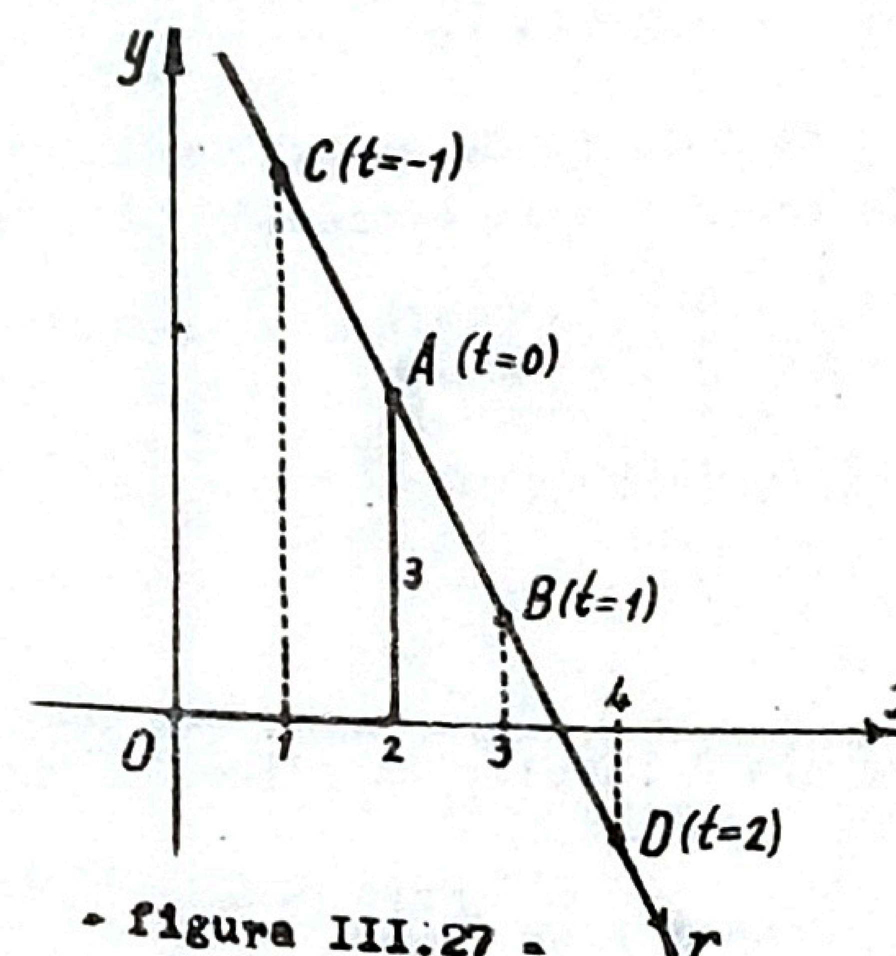
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo tanto, aplicando la expresión (3) resulta la ecuación simétrica buscada:

$$\frac{x - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - 5}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}$$

e) Representar gráficamente las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. Para resolver el problema asignemos valores a **t**; obtendremos los correspondientes valores de **x** e **y** de acuerdo al siguiente cuadro:

punto	t	x	y
A	0	2	3
B	1	3	4
C	-1	1	5
D	2	4	-1



- figura III.27 -

Grafiquemos los valores así obtenido; obtendremos la recta **r** que se aprecia en la figura III.27.-

f) Hallar los puntos de intersección de la recta $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$. De acuerdo a lo dicho en el parágrafo III.13. las coordenadas de un punto cualquiera P de la recta son $(2 - 3t\,,\,1 + t)$, siendo t el parámetro. Ahora bien, si ese punto se halla sobre la circunferencia, tendremos que sus coordenadas deben satisfacer también la ecuación de la circunferencia; luego:

$$(2 - 3t)^2 + (1 + t)^2 = 16$$

de donde:

$$10t^2 - 10t - 11 = 0$$

cuyas raíces son:

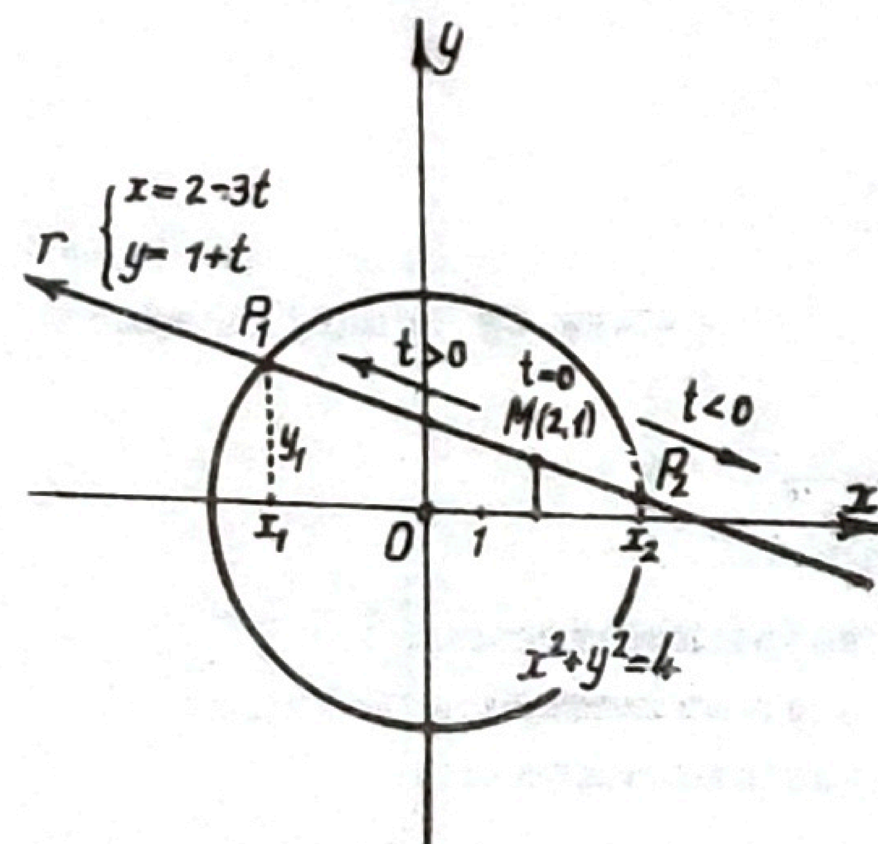
$$t_1 = \frac{5 + \sqrt{135}}{10} \quad ; \quad t_2 = \frac{5 - \sqrt{135}}{10}$$

Estos valores obtenidos para el parámetro **t** corresponden a los puntos de intersección de la circunferencia y recta dadas.

Las coordenadas de estos puntos son:

$$P_1 \begin{cases} x_1 = 2 - 3t_1 = 2 - 3\,\dfrac{5 + \sqrt{135}}{10} \cong -2{,}98 \\ y_1 = 1 + t_1 = 1 + \dfrac{5 + \sqrt{135}}{10} \cong 2{,}66 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} x_2 = 2 - 3t_2 = 2 - 3\,\dfrac{5 - \sqrt{135}}{10} \cong 3{,}98 \\ y_2 = 1 + t_2 = 1 + \dfrac{5 - \sqrt{135}}{10} \cong 0{,}34 \end{cases}$$



- figura III.28. -

Representando gráficamente los resultados obtenidos resulta la figura III. 28.-

g) Dada la ecuación $2x - 5y + 2 = 0$ hallar:

1. la ecuación paramétrica correspondiente en $x_1 = 4$. Ante todo debemos considerar el punto M_1 a partir del cual vamos a medir el parámetro. Consideremos, por ejemplo, el punto M_1 de abscisa $x_1 = 4$ y ordenada

$$y_1 = \frac{2x_1 + 2}{5} = 2$$

que calculamos de acuerdo a la ecuación dada. Las ecuaciones paramétricas, de acuerdo a la expresión (2), serán:

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot \cos\alpha = 4 + t \cdot \cos\alpha \\ y = y_1 + t \cdot \cos\beta = 2 + t \cdot \cos\beta \end{cases} \qquad (7)$$

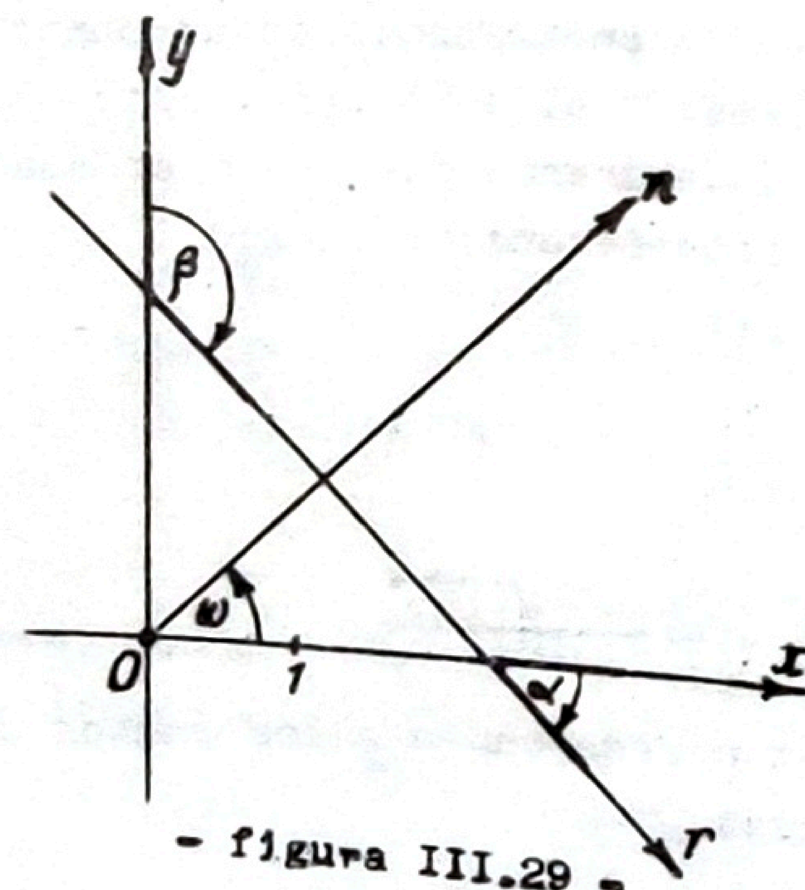
Determinemos los cosenos directores; tendremos:

$$\cos\omega = 2k$$
$$\operatorname{sen}\omega = 5k$$
$$-d = 2k$$

Ahora bien como $c = +2$, k será negativo para que d resulte positivo; luego:- $k = \dfrac{1}{-\sqrt{29}} = -\dfrac{\sqrt{29}}{29}$ y por lo tanto:

$$\cos\omega = -2\,\frac{\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{5}{29}\sqrt{29}$$



- figura III.29 -

Por su parte, si observamos la figura III.29. podemos apreciar que existe la siguiente relación entre ω y los cosenos directores:

$$\beta + \omega = \pi \quad ; \quad \alpha + \omega = \frac{\pi}{2}$$

en consecuencia tendremos que:

$$\cos\beta = -\cos\omega \quad ; \quad \cos\alpha = \operatorname{sen}\omega$$

y por lo tanto los cosenos directores de la recta serán:

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\omega = \frac{5}{29}\sqrt{29}$$

$$\cos\beta = -\cos\omega = \frac{2}{29}\sqrt{29}$$

Finalmente reemplazando los valores así obtenidos en (7) resultan las ecuaciones paramétricas buscadas:

$$\begin{cases} x = 4 + \dfrac{5}{29}\sqrt{29} \cdot t \\ y = 2 + \dfrac{2}{29}\sqrt{29} \cdot t \end{cases}$$

2. Hallar las ecuaciones simétricas para el mismo punto M_1 determinado por $x_1 = 4$. Hemos calculado que:

$$y_1 = 2 \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{5}{29}\sqrt{29} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{2}{29}\sqrt{29}$$

en consecuencia la ecuación pedida de acuerdo a la expresión (3) es:

$$\frac{x - 4}{\frac{5}{29}\sqrt{29}} = \frac{y - 2}{\frac{2}{29}\sqrt{29}}$$

EJERCICIOS: a) Representar gráficamente las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = t \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t\sqrt{2} \\ y = 1 - t\sqrt{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

b) Representar gráficamente y hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $M_1(-1 , 2)$ y cuyos cosenos directores son $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ y $\cos\beta = -\frac{1}{5}$.

R: $\begin{cases} x = -1 + \frac{2}{5}\,t \\ y = 2 - \frac{1}{5}\,t \end{cases}$

c) Representar gráficamente y hallar la ecuación simétrica que pasa por el punto $M_1(3 , 0)$ y cuyos cosenos directores son proporcionales a los números $\sqrt{6}$ y $-\sqrt{3}$ respectivamente.

R: $\dfrac{x-3}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{y}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

d) Dadas las ecuaciones paramétricas de la recta r) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$, hallar:

1. los cosenos directores. R : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. El ángulo ω. R : $\omega = \frac{\pi}{4}$
3. La distancia d al origen O(0 , 0). R : $d = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
4. Su abscisa y ordenada al origen. R : $p = q = 3$

e) Intersección de la recta $\begin{cases} x = 5 - \frac{3}{5}\,t \\ y = -3 + \frac{4}{5}\,t \end{cases}$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

$P_1(-0{,}93 \ ; \ 4{,}91)$
$P_2(4{,}45 \ ; \ -2{,}27)$

f) Dada la recta $\begin{cases} x = x_1 - \frac{4}{5}\,t \\ y = y_1 + \frac{3}{5}\,t \end{cases}$ y la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$, hallar:

1. la ecuación cuyas raíces son las distancias de $P_1(x_1 , y_1)$ a los puntos de intersección de la recta y la elipse:

R : $\dfrac{55}{25}\,t^2 - \dfrac{8x_1 - 24y_1}{5}\,t + x_1^2 + 4y_1^2 - 16 = 0$

2. Hallar la condición para la cual P_1 es punto medio de la cuerda sobre la cual se halla situado.

g) Explicar haciendo el gráfico correspondiente que significado geométrico puede dársele al parámetro t en la ecuación $\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \end{cases}$

h) Dada la recta cuya ecuación es: $4x - 3y + 3 = 0$, hallar, realizando además las representaciones gráficas correspondientes:

1. el ángulo ω. R : $\omega = 143^{\circ}08'$
2. la distancia d al origen. R : $d = \frac{3}{5}$
3. los cosenos directores. R : $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{4}{5}$
4. la ecuación normal. R : $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{3}{5} = 0$
5. las ecuaciones paramétricas en $M_1(x_1 = 0)$. R : $\begin{cases} x = \frac{3}{5}t \\ y = 1 + \frac{4}{5}t \end{cases}$
6. la ecuación simétrica en $M_2(x_2 = 3)$. R : $\dfrac{x-3}{\frac{3}{5}} = \dfrac{y-5}{\frac{4}{5}}$
7. la ecuación segmentaria o hessiana. R : $\dfrac{x}{-\frac{3}{4}} + \dfrac{y}{1} = 1$
8. la ecuación explícita. R : $y = \frac{4}{3}x + 1$
9. la inclinación y pendiente de la recta dada. R : $m = \frac{4}{3}$; $\alpha = 53^{\circ}03'$

III.15.- **Ecuación polar de una curva.-** Si en un plano consideramos una cierta curva, cuyos puntos se encuentran referidos a un sistema polar, se dice que la función $\rho = f(\omega)$ es su ecuación, siempre que las coordenadas de cada punto de la curva la verifiquen mientras que las de aquellos puntos que no le pertenezcan no la satisfagan.

Es habitual considerar al argumento ω como variable independiente, y si la función dada es uniforme, a cada valor de ω le corresponderá un valor de ρ y un punto de la curva que será así el diagrama de la función dada.

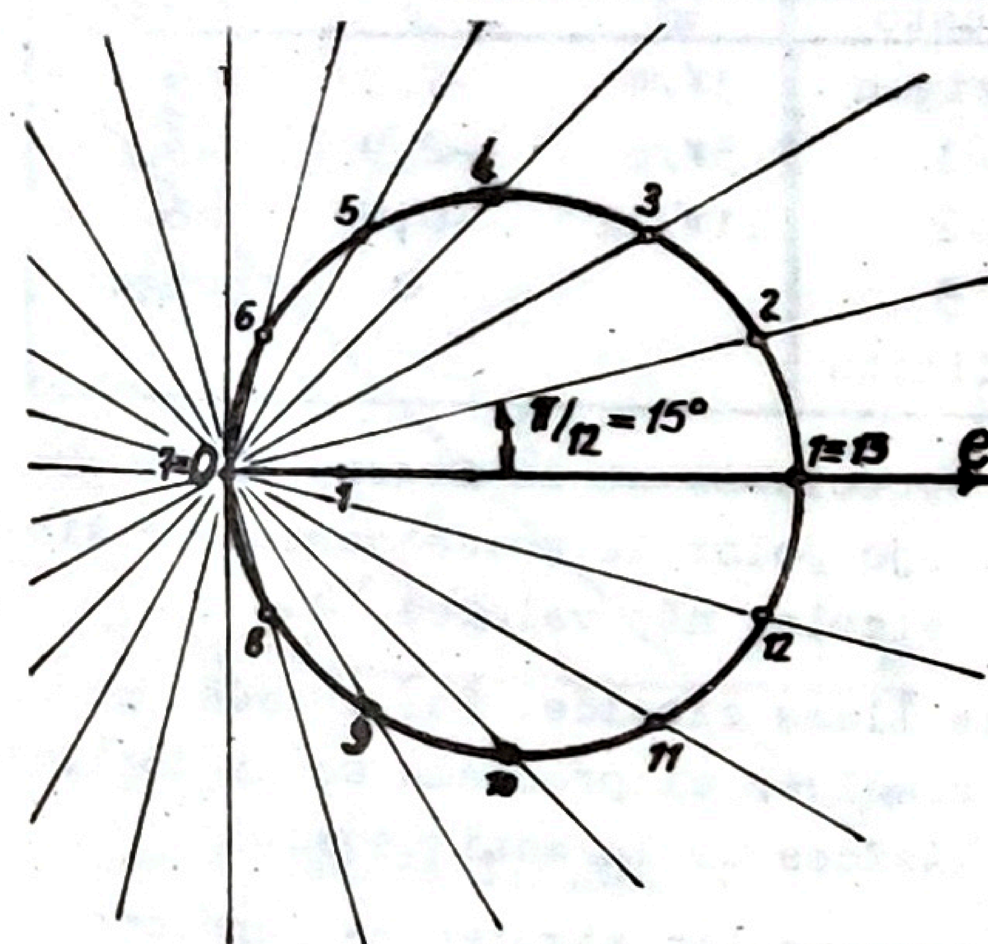
Si aplicamos el método de selección de puntos para construir una curva en coordenadas polares debemos tener presente las siguientes consideraciones:

a) radio-vectores de los puntos de corte de la curva a representar con el eje polar. Se obtienen haciendo $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ y resolviendo la ecuación resultante con respecto a ρ.
b) estudio de si la curva $\rho = f(\omega)$ es simétrica con respecto al polo. Se entiende que la curva es simétrica con respecto al polo cuando al cambiar ω por $\omega + \pi$, se cumple que ρ conserve el mismo valor absoluto y el mismo signo.
c) estudio de si la curva $\rho = f(\omega)$ es simétrica con respecto al eje polar. Se entiende que la curva es simétrica respecto del eje polar si $\rho = f(\omega)$ no varía cuando se cambia ω por $-\omega$.
d) Direcciones en las cuales la curva se aleja hacia el infinito. Se obtienen buscando los valores de ω para los cuales $\rho \to \infty$.
e) Valores de ω que deben ser excluídos, si es que los hay.

EJEMPLOS: a) Representar gráficamente la función $\rho = f(\omega) = 5 . \cos\omega$.

Si aplicamos las consideraciones enumeradas tenemos:

1. para $\omega = 0$ resulta $\rho = 5 . \cos 0 = 5$
   para $\omega = \pi$ resulta $\rho = 5 . \cos\pi = -5$
   luego: los puntos de corte con ele eje polar son $(0, 5)$ y $(\pi, -5)$.
2. para $\omega = \frac{\pi}{4}$ resulta $\rho = 5 . \cos\frac{\pi}{4} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$
   para $\omega = \frac{\pi}{4} + \pi$ resulta $\rho = 5 . \cos\frac{5\pi}{4} = -5\frac{\sqrt{2}}{2}$
   luego: como al cambiar $\omega = \frac{\pi}{4}$ por $\omega = \frac{\pi}{4} + \pi$, ρ conserva el mismo valor absoluto pero no el mismo signo la curva no es simétrica respecto al polo.
3. para $\omega = \frac{\pi}{4}$ resulta $\rho = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$
   para $\omega = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ resulta $\rho = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$
   luego: como $\cos\omega = \cos(-\omega)$ la curva es simétrica respecto del eje polar.



- figura III.30 -

4. como $\cos\omega$ no es nunca infinito la curva ha de ser cerrada.
5. ningún valor de ω hace que ρ sea imaginario.
6. En consecuencia: basta calcular un cierto número de valores de ω y ρ, de acuerdo a la tabla siguiente y tendremos:

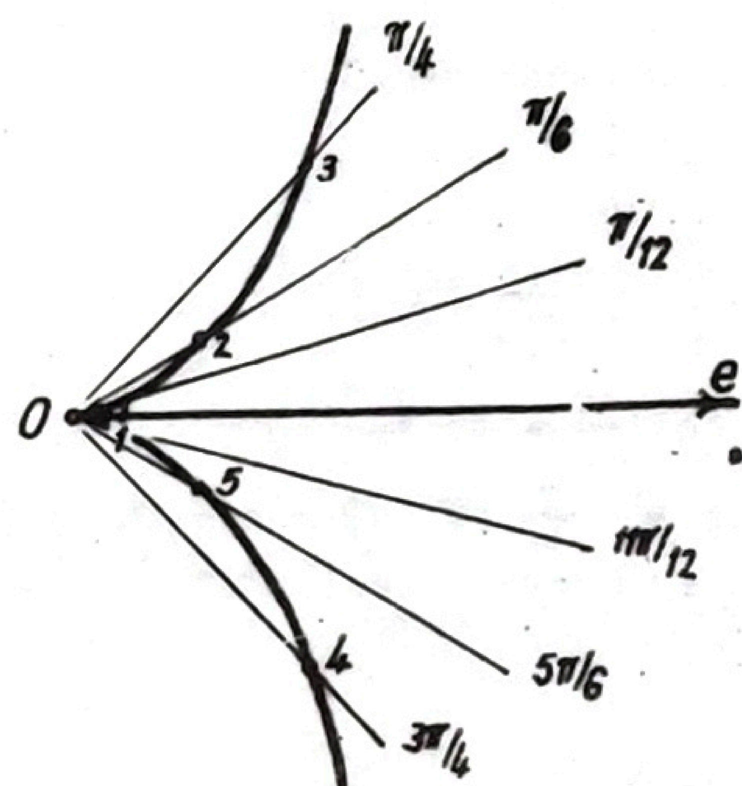
ω	ρ	punto	ω	ρ	punto
0	5	1	$5\pi/12$	1,3	6
$\pi/12$	4,8	2	$\pi/2$	0	7
$\pi/6$	4,4	3	$7\pi/12$	-1,3	8
$\pi/4$	3,5	4	$2\pi/3$	-2,5	9
$\pi/3$	2,5	5	$3\pi/4$	-3,5	10

En la figura III.30. hemos realizado el gráfico correspondiente marcando 12 puntos.

Se observa que siendo la curva simétrica respecto del eje polar, el resto de la curva puede construirse fácilmente sin calcular más valores en la tabla, dado que no se obtienen puntos nuevos. Apreciamos que la curva es una circunferencia.

b) Representar gráficamente la función $\rho = f(\omega) = 10\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\omega}{\cos\omega}$. Tendremos:

1. para $\omega = 0$ resulta $\rho = 10\,\dfrac{\operatorname{sen}^2 0}{\cos 0} = 0$
   para $\omega = \pi$ resulta $\rho = 10\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\pi}{\cos\pi} = 0$
2. para $\omega = \frac{\pi}{4}$ resulta $\rho = 10\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\pi/4}{\cos\pi/4} = 10\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.
   para $\omega = \frac{\pi}{4} + \pi$ resulta $\rho = 10\,\dfrac{\operatorname{sen}^2 5\pi/4}{\cos 5\pi/4} = -5\sqrt{2}$.
   en consecuencia: la función no es simétrica respecto del polo.
3. para $\omega = \frac{\pi}{4}$ resulta $\rho = 5\sqrt{2}$
   para $\omega = -\frac{\pi}{4}$ resulta $\rho = 5\sqrt{2}$
   en consecuencia: la función es simétrica respecto del eje polar.



- figura III.31. -

4. vemos que cuando $\cos\omega$ es suficien- temente pequeño -es decir cuando $\cos\omega \to 0$- la relación $\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\cos\omega}$ se hará suficientemente grande -es de- cir $f(\omega) \to \infty$.

   Ahora bien, recordemos que la fun- ción $\cos\omega$ se anula para $\omega = \frac{\pi}{2}$ o también $\omega = \frac{3\pi}{2}$; luego tendremos que para $\cos\omega = 0$ resulta $f(0) = \infty$

5. para ρ no se obtienen nunca valores imaginarios.

6. en consecuencia: basta tabular un cierto número de valores de ω y ρ, para poder representar la función dada. Tenemos así:

ω	ρ	punto	ω	ρ	punto
0	0	origen	$3\pi/4$	-7,1	4
$\pi/12$	0,7	1	$5\pi/6$	-2,9	5
$\pi/6$	2,9	2	$11\pi/12$	-0,7	6
$\pi/4$	7,1	3		0	origen
$\pi/2$		infinito			

La representación gráfica la apreciamos en la figura III.31. Se observa que siendo simétrica respecto del eje polar se puede construir sin mayores dificultades no siendo necesario calcular más valores.

La curva de la función dada se llama **cisoide**. Fué ideada por DIOCLES, geómetra griego que la ideó para resolver el problema de la duplicación del cubo, uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad.

EJERCICIOS: Representar gráficamente las siguientes funciones:

$\rho = f(\omega) = \frac{2}{\operatorname{sen}\omega}$; $\qquad \rho = f(\omega) = a \cdot \sec\omega$

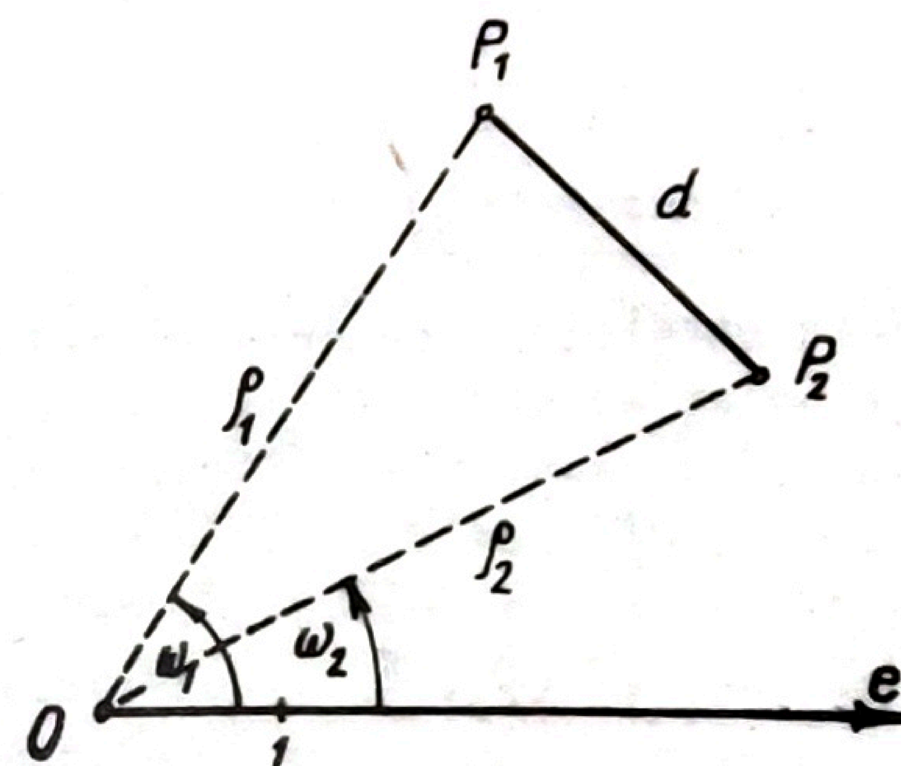
$\rho = f(\omega) = 4(\cos\omega - \operatorname{sen}\omega)$; $\qquad \rho = f(\omega) = \frac{6a}{\cos^2\omega}$

$\rho = 5$;

III.16.- **Distancia entre dos puntos.-** Consideremos en un plano polar los puntos $P_1(\omega_1, \rho_1)$ y $P_2(\omega_2, \rho_2)$ y tratemos de considerar la distancia **d** entre ambos. Considerando el triángulo OP_1P_2 y aplicando el teorema del coseno resulta:

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\omega_2 - \omega_1)}$$

También la distancia entre dos puntos podría haberse calculado empleando las fórmulas de transformación de coordenadas polares a cartesianas explicadas en II.4. y aplicando la fórmula para el cálculo de distancias en II.7., pero es indudable que empleando este procedimiento el proceso resulta más largo.

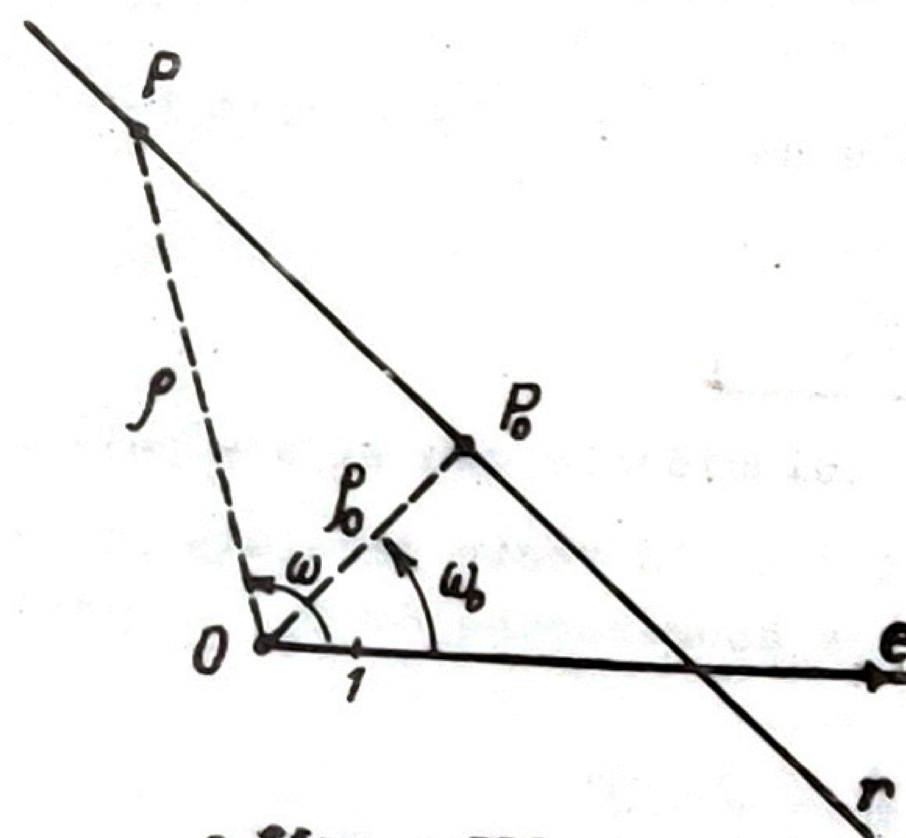


- figura III.32. -

Luego: **en un sistema de coordenadas polares la distancia entre dos puntos, es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus radio-vectores menos el doble producto de éstos por el coseno de la diferencia de sus argumentos.**(figura III.32).-

En el caso particular de que se calcule la distancia de un punto al origen del sistema polar, ella estará expresada por su radio-vector.

III.17.- **Ecuación polar de una recta.-** Consideremos en un plano cuyos puntos están referidos a un sistema polar una **recta r que no pase por el** polo.(figura III.33).



- figura III.33. -

Es evidente que su posición relativa al eje polar queda determinada si se conoce la proyección P_o del polo O sobre **r**.

En efecto: para cada posición de la recta **r** queda determinara una proyección P_o y para cada posición de P_o queda definido el segmento $\overline{OP_o}$ y determinada una relación de perpendicularidad por P_o.

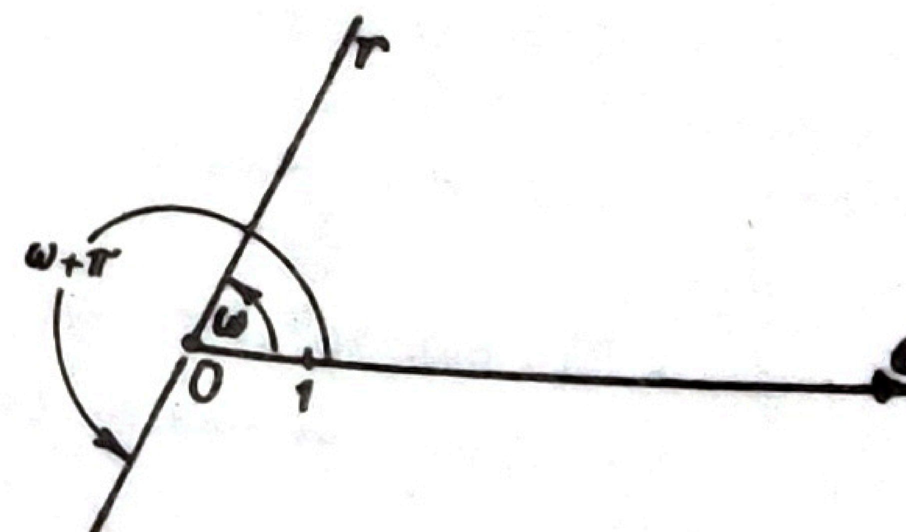
Sea esa perpendicular (ω_o, ρ_o) y consideremos sobre **r** un punto $P(\omega, \rho)$. En el triángulo OP_oP resulta:

$$\cos(\omega - \omega_o) = \frac{\overline{OP_o}}{\overline{OP}} = \frac{\rho_o}{\rho}$$

de donde:

$$\rho = f(\omega) = \frac{\rho_o}{\cos(\omega - \omega_o)} \qquad (1)$$

que es la **ecuación polar de una recta que no pasa por el polo.**



- figura III.34. -

Si la recta contiene al polo pueden suceder dos cosas pues puede tratarse de un rayo de origen O, o bien de una recta que pasa por el origen de coordenadas polares.(figura III.34).- En el primer caso como dicho rayo forma con el eje polar un ángulo ω tal que $\omega = k =$ constante, su ecuación es:

$$\rho = f(\omega) = \omega = k = \text{constante} \qquad (2)$$

En el segundo caso si la consideramos dividida en dos semirrectas opuestas de origen O. la ecuación polar de la recta viene dada entonces por el sis-

tema de ecuaciones siguiente:

$$\rho = f(\omega) = \omega = k = \text{constante}$$
$$\rho = f(\omega) = \omega + \pi = k + \pi = \text{constante} \qquad (3)$$

Para determinar la ecuación de una recta paralela y no coincidente con el eje polar se proyecta el polo O, sobre la recta dada, en P_o (figura III.35). El segmento $\overline{OP_o}$ nos permite obtener la relación de perpendicularidad de P_o que en éste caso es: $(\rho_o, \frac{\pi}{2})$. Consideremos sobre la recta r un punto $P(\rho, \omega)$; determinaremos el triángulo OP_oP en donde:

- figura III.35. -

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \frac{\rho_o}{\rho}$$

o sea:

$$\rho = \frac{\rho_o}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}$$

pero como:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \operatorname{sen}\omega$$

resulta:

$$\rho = f(\omega) = \frac{\rho_o}{\operatorname{sen}\omega} \qquad (4)$$

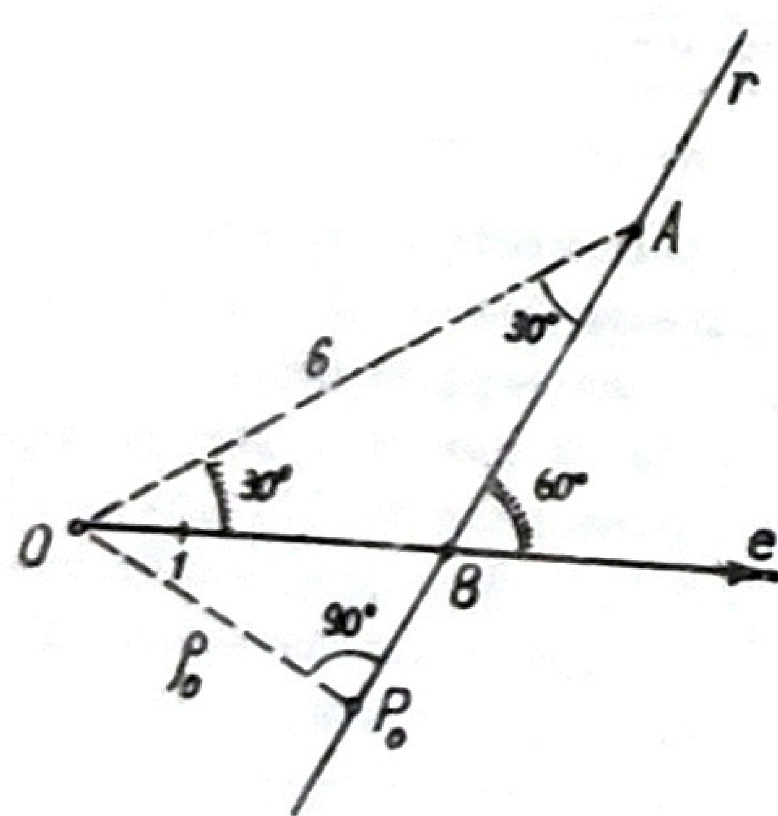
como ecuación de una recta paralela y no coincidente con el eje polar.

EJEMPLOS: a) Calcular la ecuación polar de la recta paralela al eje polar y que pasa por $A(\frac{\pi}{4}, 3)$. Calculemos las coordenadas de P_o; tendremos que $\omega_o = \frac{\pi}{2}$ y $\rho_o = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, dado que:

$$\rho_o = \overline{OP_o} = \overline{OA} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

luego: aplicando la expresión (4) tenemos:

$$\rho = f(\omega) = \frac{\rho_o}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \operatorname{cosec}\omega$$



- figura III.36. -

b) Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto $A(30^o, 6)$ y que forma con el eje polar un ángulo de 60^o. La representación gráfica del problema la apreciamos en la figura III.36. Calculemos las coordenadas del punto P_o, tendremos:

$$\omega_o = -30^o = -\frac{\pi}{6}$$

$$\rho_o = \overline{OA} \cdot \operatorname{sen} 30^o = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

luego: aplicando la expresión (1) resultará:

$$\rho = \frac{3}{\cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\rho = 3 \cdot \sec\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)$$

<u>EJERCICIOS:</u> a) Calcular la ecuación de la recta paralela al eje polar que pasa por el punto $A(\frac{\pi}{4}, 6)$. R: $\rho = 3\sqrt{2} \cdot \sec\omega$

b) Calcular la ecuación de la recta que pasa por $A(\frac{4\pi}{3}, 10)$ y forma con el eje polar un ángulo de 50^o. R: $\rho = 1{,}736 \cdot \sec(\omega + 40^o)$

c) Dada la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$ hallar su ecuación en coordenadas polares. R: $\rho(a\cos\omega + b\operatorname{sen}\omega) + c = 0$

d) Idem c) para $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. R: $\rho\left[\frac{\cos}{p} + \frac{\operatorname{sen}}{q}\right] = 1$

e) Dada la ecuación $x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - d = 0$, transformarla a coordenadas polares y construir la curva respectiva. R: $\rho \cdot \cos(\omega - \varphi) - d = 0$

f) Calcular la distancia entre los puntos $A(\frac{2\pi}{3}, 6)$ y $B(30^o, 4)$. R: $d = 2\sqrt{7}$

g) Se traza una recta por un punto fijo O hasta cortar a una circunferencia fija en P_1 y P_2. Hallar el lugar geométrico de un punto P de dicha recta de tal manera que:

$$OP = 2\,\frac{OP_1 \cdot OP_2}{OP_1 + OP_2}$$

R: una línea recta

h) Dadas las rectas $r_1)\ \rho = \frac{5}{\cos(\omega - \frac{2\pi}{3})}$ y $r_2)\ \rho = \frac{8}{\cos(\omega + \frac{\pi}{2})}$, calcular el ángulo que forman al cortarse. R: $\Omega = \frac{\pi}{4}$

EJERCICIOS A RESOLVER

1. Dados los puntos $A(-5, 5)$ y $B(1, 2)$, determinar las ecuaciones explícitas, implícitas, hessiana, normal, paramétrica, simétrica y polar de la recta que:
   a) pasa por los puntos A y B dados;
   b) pasa por A y tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$;
   c) pasa por B y es perpendicular a la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$;
   d) pasa por B y es paralela al eje de ordenadas.
   e) pasa por A y tiene abscisa y ordenada al origen iguales;
   f) efectuar las representaciones gráficas correspondientes.
2. Dado el triángulo $A(-2, -1)$ $B(3, \frac{1}{2})$ y $C(0, 5)$, calcular:
   a) las ecuaciones de sus lados (a, b y c);
   b) las ecuaciones de sus medianas (m_a, m_b y m_c);
   c) las ecuaciones de sus alturas (h_a, h_b y h_c);
   d) las ecuaciones de sus bisectrices (b_a, b_b y b_c);
   e) las ecuaciones de sus mediatrices (m_{za}, m_{zb} y m_{zc});
   f) el baricentro G;
   h) los valores de los ángulos ($\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$).
   i) Representar gráficamente los elementos calculados y el triángulo dado.
3. Dado el triángulo ABC por los siguientes elementos:
   lado b) .=. $y - 8x + 6 = 0$
   lado c) .=. $9y - 8x - 10 = 0$
   mediana m_b) .=. $y = -2$
   determinar:
   a) longitud de los lados;
   b) longitud de sus medianas;
   c) longitud de las alturas;
   d) longitud de las bisectrices hasta cortar los lados opuestos a sus ángulos;
   e) probar que tiene un ángulo recto;
   f) efectuar las representaciones gráficas correspondientes.
4. Determinar m de modo que la recta $y = mx - 5$ divida al segmento $(-1, 2)$ y $(7, -2)$ en la relación $\frac{2}{3}$. Efectuar la representación gráfica.
5. Demostrar que la recta $ax + by + c = 0$ divide al segmento que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ en segmentos cuya relación es:
$$r = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$$
6. En el cuadrilátero $A(-2, 3)$ $B(-3, -2)$ $C(4, -3)$ $D(1, 5)$ efectuar las representaciones gráficas correspondientes y determinar:
   a) la longitud de sus lados (a, b, c, d) y diagonales (d_1, d_2);
   b) sus ángulos ($\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$) interiores;
   c) en que punto y bajo que ángulo se cortan las diagonales.

CAPITULO IV

FUNCIONES RACIONALES ENTERAS

IV.1.- **Naturaleza del problema a estudiar.-** En el Capítulo I, parágrafo I.5 (clasificación de funciones) definimos las funciones algebraicas como las que satisfacen una ecuación de la forma:

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P(x) = 0 \qquad (1)$$

donde $P_0(x)$ es un polinomio ordenado gradientemente en el término variable x. También dijimos que las funciones algebraicas pueden ser explícitas, si $y = f(x)$ ó $x = g(y)$, o implícitas, si $F(x, y) = 0$, y que nos ocuparíamos,- en particular, del estudio de las funciones algebraicas explícitas también llamadas, simplemente, algebraicas.

Cuando la variable independiente se halla sometida a operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencias de exponentes enteros), las funciones algebraicas son racionales, pero si las operaciones que la afectan son irracionales (elevación a potencias de exponentes fraccionarios en número finito de veces), se llaman funciones algebraicas irracionales. Ambas pueden ser fraccionarias o enteras según que - la variable independiente, respectivamente figure o no en el denominador.

Resulta conveniente saber que toda función algebraica explícita puede expresarse en forma implícita, para lo cual es necesario que verifique la ecuación (1), es decir que sea algebraica. Por ejemplo la función $y = x^3$ se puede expresar así:

$$1.y + (-x)^3 = 0$$

ecuación que identificada con la (1) evidencia que $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = -x^3$

La recíproca no siempre es posible, ya que no todas las funciones algebraicas implícitas pueden expresarse en forma explícita. Tal es lo que sucede, por ejemplo, con la función:

$$F(x, y) = 3y^2 + 4xy - 5x^2 = 0$$

El objeto del capítulo presente es estudiar las funciones algebraicas racionales enteras.

Se las define diciendo que son aquellas que satisfacen una ecuación de la forma:

$$\boxed{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n} \qquad (2)$$

donde a_0, a_1, a_2, ... , a_n son constantes; n (mayor exponente que afecta la variable independiente) nos expresa el grado de la función cuya variable independiente se encuentra sometida a operaciones racionales.

Por ejemplo: son funciones algebraicas racionales enteras las siguientes:

$$f(x) = mx + n$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

....

Se comprende que mediante la generalización llegaríamos a una expresión del tipo de la (2).

Entre los ejemplos dados se advierte la presencia de la función lineal. Esta, en efecto: cumple con las condiciones establecidas en la definición, a saber:

$$a_0 = m \quad ; \quad n = 1 \quad ; \quad a_1 x^{n-1} = a_2 x^{n-2} = \dots = 0 \quad ; \quad a_n = n$$

vale decir que se halla constituída por un polinomio ordenado decrecientemente en x y sometido a operaciones racionales, figurando en todos sus términos la variable independiente en el numerador de la expresión.

El estudio de esta función en el Capítulo III obedece a razones de diversa índole, entre las que se destacan, las didácticas y prácticas, porque el lector adquiere así una idea de como realizar el estudio de una función y porque se satisfacen, para ella, una serie de relaciones métricas y analíticas que no se verifican para otras funciones algebraicas racionales enteras.

En este capítulo, entonces, estudiaremos las funciones algebraicas racionales enteras con exclusión de la función lineal y, en particular, las de segundo grado (parábola cuadrática, circunferencia y elipse). Antes de emprender esta tarea debemos proceder a la elección del método de estudio y ocuparnos de la determinación práctica del intervalo de definición de una función , cuestiones éstas de gran importancia para lo sucesivo.

IV.2.- <u>Métodos de estudio: inductivo y deductivo. Elección.-</u> Sea la función $y = f(x) = x^3$. Su intervalo de definición $[-\infty, \infty]$ (infinito) viene dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$ lo que equivale a establecer que su variable independiente puede adquirir cualquier valor real.

Para estudiar nuestra función podríamos adoptar el siguiente proceder:

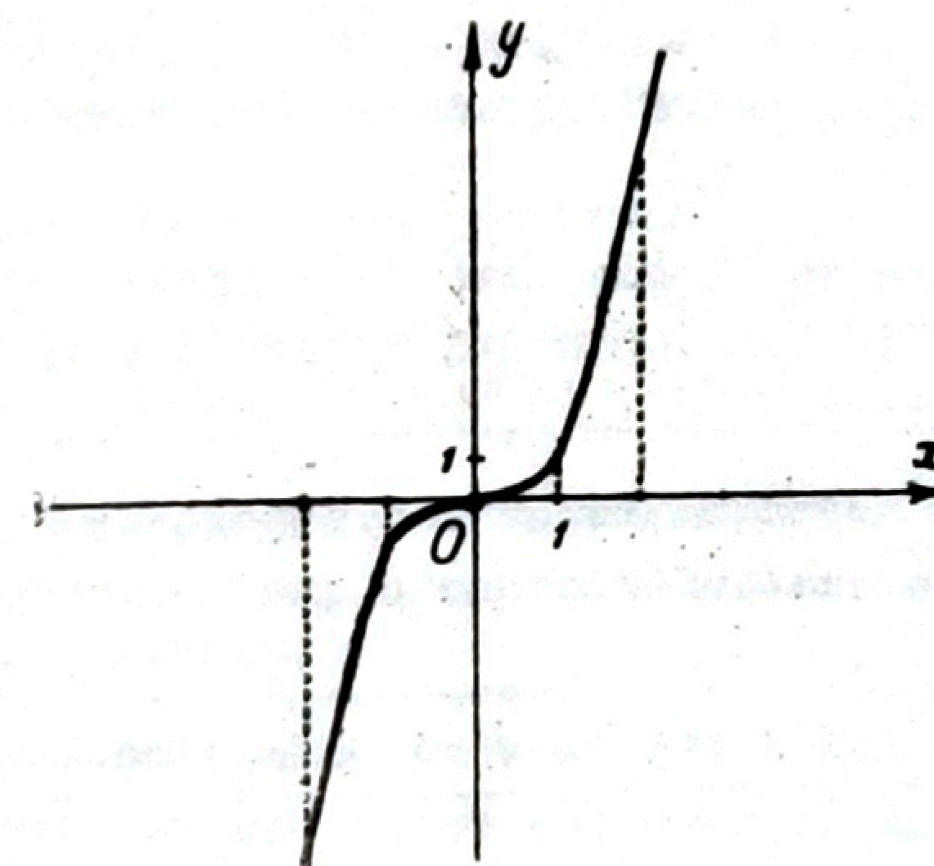
1.a) asignar a la variable independiente valores comprendidos dentro del conjunto numérico en que se halla definida (en nuestro caso valores reales cualesquieras):

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

y elevarlos al cubo; con ello obtendríamos los respectivos valores para la función:

$$\dots, -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, \dots$$

que llevados a un plano coordenado nos permitirían obtener una serie de puntos que unidos darían su curva representativa o diagrama.(figura IV.1);



- figura IV.1 -

b) realizada la representación gráfica estaríamos en condiciones de establecer su variación, estudiar las condiciones de simetría de la curva extrayendo así conclusiones generales que permitirían formar familias de curvas.

También podría procederse así:

2.a) estudiar la función analíticamente de acuerdo a su intervalo de definición y establecer su variación;

b) determinar de acuerdo con 2.a) que diagrama le corresponde y a que familia de curvas pertenece su gráfica;

c) representar gráficamente la función de acuerdo a lo establecido en 2.a) y b);

d) estudiar su simetría y extraer conclusiones generales.

Con poco meditar se advierte lo extenso del procedimiento indicado en 1 y la escasa certeza que se lograrían con los resultados obtenidos, certeza que se reduce aún más, por los errores que cometen la visual y los instrumentos de medida. Si procediéramos a estudiar mediante este método la representación gráfica y variación de una función emprenderíamos una tarea ardua y estéril, con frecuentes obstáculos, no solo por los inconvenientes señalados, sino porque siempre tendríamos la incertidumbre de saber si los diagramas obtenidos son los que representan la función dada, ya que es imposible considerar en un intervalo todos los valores numéricos existentes y representarlos. Además tendríamos que agregar los inconvenientes de representación que se producen cuando se trabaja con funciones complicadas.

Es por eso que este método, llamado inductivo o de selección de puntos no es el que más se adapta para estudiar ANALISIS MATEMATICO, sino que se utiliza el descripto en 2., llamado deductivo. Tal es el que adoptaremos.

Las diferencias entre uno y otro radican en lo siguiente: mientras el método inductivo realiza la representación gráfica como primer tarea para llegar a estudiar la relación existente entre ésta y la expresión de la función, el método deductivo estudia la expresión de la función como primer tarea para determinar su representación gráfica; aquél, entonces, de la individualidad va a la generalidad; éste a la inversa. Si se adopta el método deductivo basta ubicar unos pocos puntos para tener construída así la curva representativa de la función que se considere.

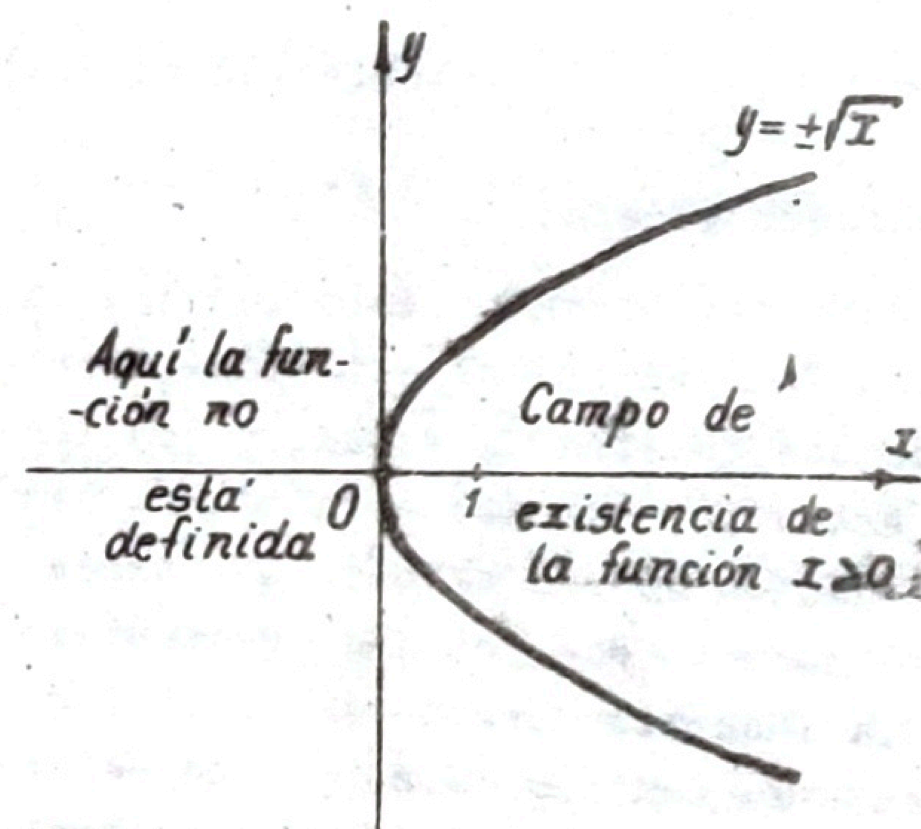
No obstante, el método de selección de puntos resulta conveniente para representar curvas empíricas y funciones de simple expresión.

IV.3.- Campo de existencia de una función.- La función $y = f(x)$ considerada dentro del campo de los números reales estará definida sólo cuando la variable independiente pueda variar dentro de un conjunto de valores que llamaremos campo de definición o de existencia de la función y cuyo intervalo de definición delimita.

El intervalo de definición o existencia es el conjunto de valores reales y finitos que puede asignarse a la variable independiente para que la función tome también valores reales y finitos.

La determinación de este intervalo es de mucha importancia para la representación gráfica de una función, o para cualquier estudio que se desee efectuar.

Por ejemplo: la función $\pm\sqrt{x}$ solo estará definida en el campo de los números reales cuando la variable independiente $x \geq 0$ (es decir que x puede variar solo dentro de un conjunto de números: los no negativos).(figura IV. 2).-



- figura IV.2 -

En efecto: para que y sea real y finito, dado que la variable independiente x, se halla afectada del signo radical, deberá ser positiva o nula para poder extraer su raíz cuadrada. Luego: el intervalo de definición de la función es:

$$0 \leqslant x < +\infty$$

y por lo tanto: para determinar el intervalo de definición de una función debe trabajarse en base al siguiente principio general: todas las operaciones indicadas en la ecuación de la función que da su valor deben ser posibles y determinadas en el campo de los números reales.

A continuación se detallan las limitaciones que padecen las distintas operaciones:

- O P E R A C I O N E S -	- L I M I T A C I O N E S -
Suma, diferencia, producto, potencias de exponente natural y raíces de índice impar;	SIN LIMITACIONES
Cocientes;	DENOMINADOR $\neq 0$
Raíces de índice par;	RADICANDO POSITIVO O NULO

- O P E R A C I O N E S -	- L I M I T A C I O N E S -
Senos y cosenos;	SIN LIMITACIONES
Tangentes y secantes;	COS X $\neq 0$
Cotangentes y cosecantes;	SEN X $\neq 0$
Arco seno y arco coseno;	EL VALOR A QUE AFECTAN DEBE ESTAR COMPRENDIDO ENTRE -1 y +1, AMBOS EXTREMOS EXCLUIDOS
Arco tangente y arco cotangente;	SIN LIMITACIONES
Arco secante y arco cosecante;	EL VALOR A QUE AFECTAN DEBE SER MAYOR O IGUAL A 1 Y MENOR O IGUAL A -1
Logaritmos;	EL LOGARITMANDO DEBE SER POSITIVO
Exponenciales de base positiva;	SIN LIMITACIONES

Para determinar el intervalo de definición de una función debemos analizar todas las operaciones parciales que figuren en la ecuación de la función considerada.

En efecto: sea la función:

$$y = f(x) = x^5 - 4x + 11$$

como podemos advertir, la ecuación de la función es un polinomio y las operaciones que en él figuran son: suma algebraica, multiplicación y potenciación que no tienen limitación alguna en el campo de los números reales; en consecuencia, la variable independiente puede tomar cualquier valor; luego:

$$-\infty < x < \infty \qquad \text{o sea} \qquad [-\infty, \infty]$$

es su intervalo de definición.

Consideremos ahora la función:

$$y = f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 3)}$$

la ecuación de la función es un monomio y las operaciones que lo componen son: raíz de índice par, cuya limitación consiste en que el radicando no debe ser negativo; productos y sumas algebraicas que no tienen limitación alguna. Como el monomio se anula para $x = 1$ y $x = 3$, y como en el intervalo $(1, 3)$ la función es negativa, resulta que las desigualdades:

$$-\infty < x \leqslant 1 \qquad \text{o sea} \qquad [-\infty, 1)$$
$$3 \leqslant x < \infty \qquad \text{o sea} \qquad (3, \infty]$$

dan su intervalo de definición.

EJEMPLOS: a) Determinar el intervalo de definición de la función:

$$y = f(x) = \frac{5x - 1}{3x + 2}$$

Existe una operación con limitación que es el cociente, mientras que los productos y sumas algebraicas no observan limitación. Luego: como aquél se

anula para $x = -\frac{2}{3}$, el intervalo de definición buscado es:

$$-\infty < x < -\frac{2}{3}$$
$$-\frac{2}{3} < x < \infty$$

b) Idem a) para:

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x^4 - 16}$$

Existen dos operaciones con limitación: raíz de índice par y cociente. Como el radicando debe ser positivo o nulo y como se anula para $x = 1$ y $x = 2$, para que $(x-1)(x-2) \geq 0$ es necesario que:

$$\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ x-2>0 \end{matrix}\right\} x \geq 2 \qquad \text{o bien} \qquad \left.\begin{matrix} x-1\leq 0 \\ x-2\leq 0 \end{matrix}\right\} x \leq 1$$

de donde resulta que dicho radicando es negativo en el intervalo $(1, 2)$ y fuera de dicho intervalo positivo; luego, los valores:

$$-\infty < x \leq 1 \quad ; \quad 2 \leq x < \infty \qquad (1)$$

son limitaciones en el numerador.

El denominador también debe ser distinto de cero; como se anula para $x = \pm 2$, los valores:

$$-\infty < x < -2 \quad ; \quad -2 < x < 2 \quad ; \quad 2 < x < \infty \qquad (2)$$

Finalmente de (1) y (2) deducimos que:

$$-\infty < x < -2$$
$$-2 < x \leq 1$$
$$2 < x < \infty$$

es el intervalo de definición de la función:-

c) Idem a) para:

$$y = f(x) = \log(2x^2 + x - 1)$$

Para que el logaritmo exista, el logaritmando debe ser positivo; en consecuencia debemos resolver la ecuación de segundo grado que lo constituye; sus raíces son: $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Como en el intervalo $(-1, \frac{1}{2})$ la expresión $2x^2 + x - 1$ es negativa, las desigualdades:

$$-\infty < x < -1$$
$$\frac{1}{2} < x < \infty$$

dan su intervalo de definición.

) Idem a) para:

$$y = f(x) = 5\ \text{tg}(3x + 2)$$

Para que la función dada exista debe cumplirse que $\cos(3x + 2)$ no se anule. Como esto sucede para $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ resulta entonces que:

$$3x + 2 \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{de donde} \quad x \neq \frac{\pi - 4}{6}$$
$$3x + 2 \neq \frac{3\pi}{2} \quad \text{de donde} \quad x \neq \frac{3\pi - 4}{6}$$

luego, el intervalo de definición de la función dada será:

$$-\infty < x < \frac{\pi - 4}{6}$$
$$\frac{\pi - 4}{6} < x < \frac{3\pi - 4}{6}$$
$$\frac{3\pi - 4}{6} < x < \infty$$

e) Idem a) para:

$$y = f(x) = \text{arc cos} \frac{2x^2 - 3x - 4}{5}$$

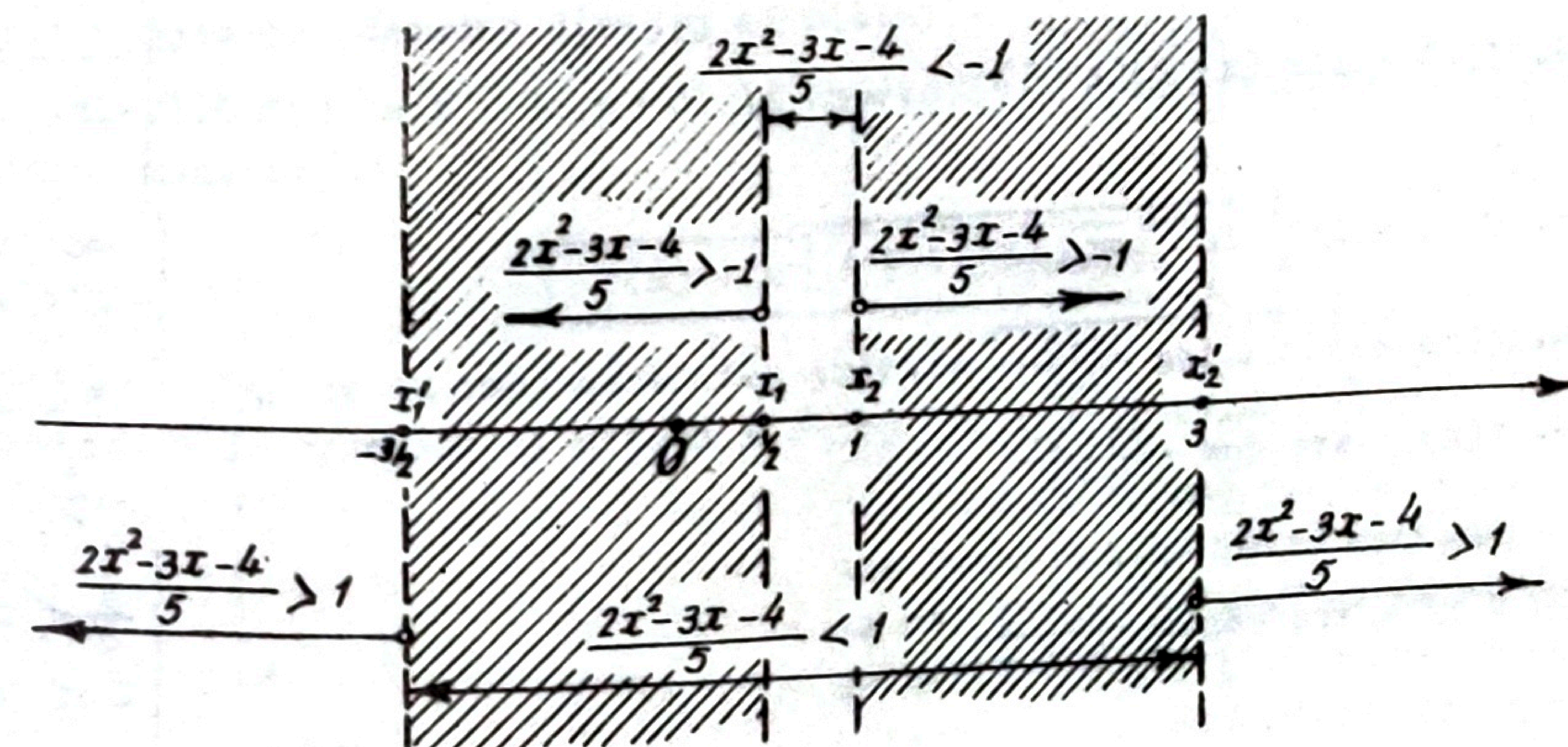
Para que la función dada exista debe cumplirse que $-1 \leq \frac{2x^2 - 3x - 4}{5} \leq 1$; en consecuencia, debemos resolver las ecuaciones obtenidas al igualar el trinomio de segundo grado a los extremos considerados, o sea:

$$\frac{2x^2 - 3x - 4}{5} = -1 \quad \text{cuyas raíces son} \quad x_1 = \frac{1}{2}, \; x_2 = 1$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 4}{5} = 1 \quad \text{cuyas raíces son} \quad x_1' = -\frac{3}{2}, \; x_2' = 3$$

Llevemos sobre un eje (figura IV.3) los valores hallados, tendremos que en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ la expresión $\frac{2x^2 - 3x - 4}{5}$ asume valores menores a -1, en tanto que fuera del intervalo $(-\frac{3}{2}, 3)$ asume valores mayores que $+1$; como la función existe para valores comprendidos entre -1 y $+1$, resulta finalmente el siguiente intervalo de definición:

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$
$$1 \leq x \leq 3$$



- figura IV.3 -

EJERCICIOS: Hallar los intervalos de definición de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - x + 5$ — R: $-\infty < x < \infty$
2. $f(x) = (5x^2 - 3)(x - 5)$ — R: $-\infty < x < \infty$

anula para $x = -\frac{2}{3}$, el intervalo de definición buscado es:

$$-\infty < x < -\frac{2}{3}$$
$$-\frac{2}{3} < x < \infty$$

b) Idem a) para:

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x^4 - 16}$$

Existen dos operaciones con limitación: raíz de índice par y cociente. Como el radicando debe ser positivo o nulo y como se anula para $x = 1$ y $x = 2$, para que $(x-1)(x-2) \geq 0$ es necesario que:

$$\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ x-2>0 \end{matrix}\right\} x \geq 2 \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{matrix} x-1<0 \\ x-2<0 \end{matrix}\right\} x \leq 1$$

de donde resulta que dicho radicando es negativo en el intervalo (1 , 2) y fuera de dicho intervalo positivo; luego, los valores:

$$-\infty < x \leq 1 \quad ; \quad 2 \leq x < \infty \qquad (1)$$

son limitaciones en el numerador.

El denominador también debe ser distinto de cero; como se anula para $x = \pm 2$, los valores:

$$-\infty < x < -2 \quad ; \quad -2 < x < 2 \quad ; \quad 2 < x < \infty \qquad (2)$$

Finalmente de (1) y (2) deducimos que:

$$-\infty < x < -2$$
$$-2 < x \leq 1$$
$$2 < x < \infty$$

es el intervalo de definición de la función:-

c) Idem a) para:

$$y = f(x) = \log(2x^2 + x - 1)$$

Para que el logaritmo exista, el logaritmando debe ser positivo; en consecuencia debemos resolver la ecuación de segundo grado que lo constituye; sus raíces son: $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Como en el intervalo $(-1, \frac{1}{2})$ la expresión $2x^2 + x - 1$ es negativa, las desigualdades:

$$-\infty < x < -1$$
$$\frac{1}{2} < x < \infty$$

dan su intervalo de definición.

) Idem a) para:

$$y = f(x) = 5\,\mathrm{tg}(3x + 2)$$

Para que la función dada exista debe cumplirse que $\cos(3x + 2)$ no se anule. Como esto sucede para $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ resulta entonces que:

$$3x + 2 \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{de donde} \quad x \neq \frac{\pi - 4}{6}$$
$$3x + 2 \neq \frac{3\pi}{2} \quad \text{de donde} \quad x \neq \frac{3\pi - 4}{6}$$

luego, el intervalo de definición de la función dada será:

$$-\infty < x < \frac{\pi - 4}{6}$$
$$\frac{\pi - 4}{6} < x < \frac{3\pi - 4}{6}$$
$$\frac{3\pi - 4}{6} < x < \infty$$

e) Idem a) para:

$$y = f(x) = \arccos\frac{2x^2 - 3x - 4}{5}$$

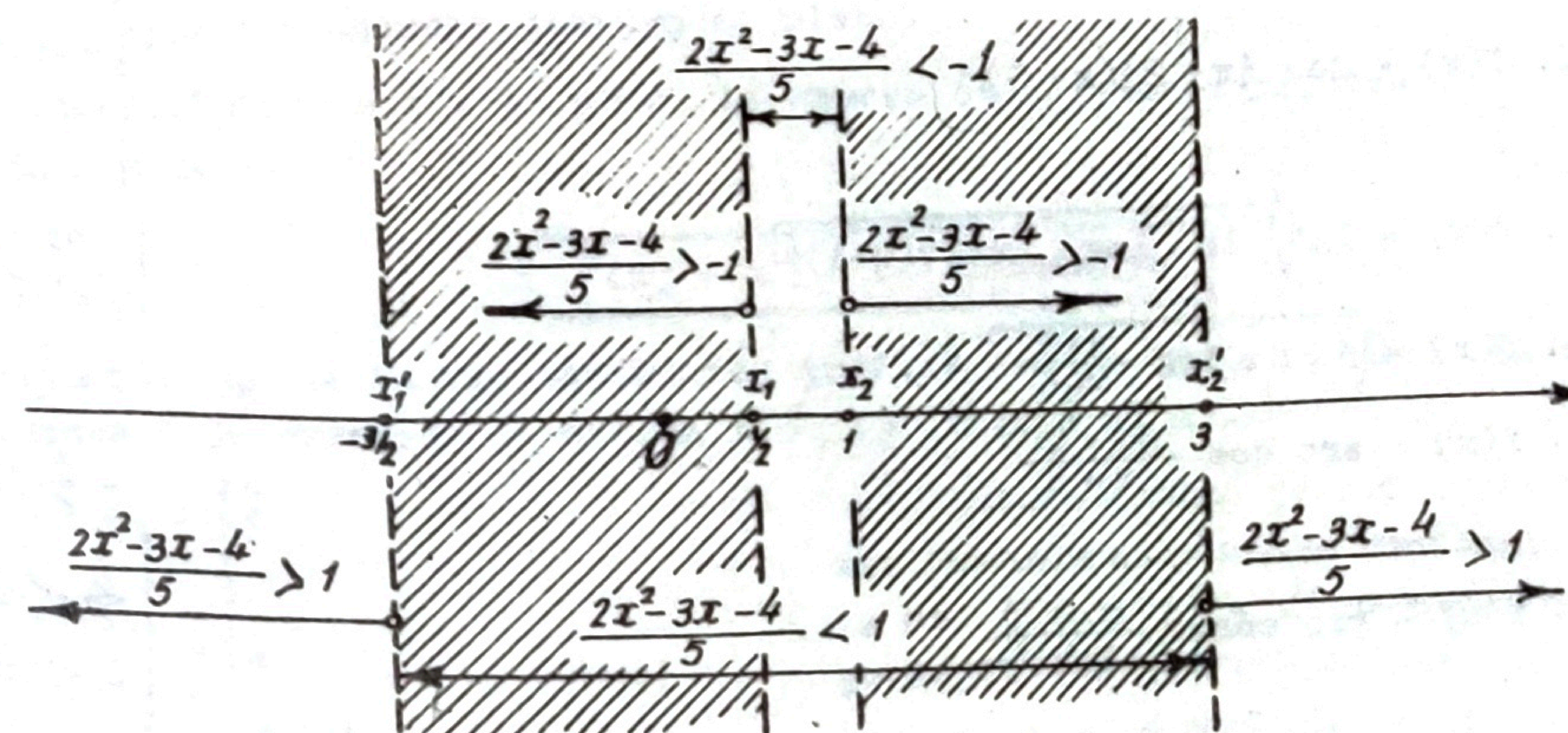
Para que la función dada exista debe cumplirse que $-1 \leq \frac{2x^2 - 3x - 4}{5} \leq 1$; en consecuencia, debemos resolver las ecuaciones obtenidas al igualar el trinomio de segundo grado a los extremos considerados, o sea:

$$\frac{2x^2 - 3x - 4}{5} = -1 \quad \text{cuyas raíces son} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 4}{5} = 1 \quad \text{cuyas raíces son} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Llevemos sobre un eje (figura IV.3) los valores hallados, tendremos que en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ la expresión $\frac{2x^2 - 3x - 4}{5}$ asume valores menores a -1, en tanto que fuera del intervalo $(-\frac{3}{2}, 3)$ asume valores mayores que +1; como la función existe para valores comprendidos entre -1 y +1, resulta finalmente el siguiente intervalo de definición:

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$
$$1 \leq x \leq 3$$



- figura IV.3 -

EJERCICIOS: Hallar los intervalos de definición de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - x + 5$ R: $-\infty < x < \infty$
2. $f(x) = (5x^2 - 3)(x - 5)$ R: $-\infty < x < \infty$

3. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)(x+1)}$ R : $-\infty<x<\infty$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x-5}$ R : $\begin{cases} -\infty<x<\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}<x<\infty \end{cases}$

5. $f(x) = \dfrac{x+5}{6-2x^2}$ R: $\begin{cases} -\infty<x<-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \\ \sqrt{3}<x<\infty \end{cases}$

6. $f(x) = \dfrac{x^6+5}{2x-3}$ R: $\begin{cases} -\infty<x<\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}<x<\infty \end{cases}$

7. $f(x) = \sqrt{2-5x}$ R: $-\infty<x<\frac{2}{5}$

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-4}}{x-3}$ R: $\begin{cases} -\infty<x\leq-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\leq x<3 \\ 3<x<\infty \end{cases}$

9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2(x+3)}}{x-3}$ R: $\begin{cases} -3\leq x<3 \\ 3<x<\infty \end{cases}$

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x^2-x+1}}{3x^2+x5-2}$ R: $\begin{cases} -\infty<x<-2 \\ -2<x\leq-1 \\ \frac{1}{2}\leq x<\infty \end{cases}$

11. $f(x) = \left[\dfrac{2x+1}{x^2-7}\right]^{\frac{3x}{2}}$ R: $\begin{cases} 0<x<\sqrt{7} \\ \sqrt{7}<x<\infty \end{cases}$

12. $f(x) = \log\,(x+2)(x+5)$ R: $\begin{cases} -\infty<x\leq-2 \\ -2\leq x<5 \\ 5<x<\infty \end{cases}$

13. $f(x) = \ln\sqrt[3]{\ln.\log\left[(x+1)(x-1)\right]}$ R: $\begin{cases} -\infty<x<-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}<x<\infty \end{cases}$

14. $f(x) = \sqrt[4]{\ln.\log\frac{x+3}{x-3}}$ R: $3<x<\infty$

15. $f(x) = \text{arc cos}\,\dfrac{3x+2}{x-1}$ R: $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{4}$

16. $f(x) = \text{arc cosec}\,\dfrac{x+3}{x-6}$ R: $\begin{cases} \frac{3}{2}\leq x<6 \\ 6<x<\infty \end{cases}$

IV.4.- Función algebraica racional entera: tipo $f(x) = x^n$.- Definida en IV.1 la función algebraica racional entera como la que satisface una ecuación de la forma

$$\boxed{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n} \qquad (1)$$

corresponde realizar su estudio en particular. Su representación gráfica recibe en todas sus posibles formas el nombre de parábola.

a) GENERALIDADES. Su expresión más simple es:

$$\boxed{f(x) = x^n} \qquad (2)$$

y se obtiene de la expresión (1) haciendo:

$$a_0 = 1 \qquad ; \qquad a_0x^{n-1} = a_1x^{n-2} = \dots = a_n = 0$$

De inmediato se aprecia que el estudio de la expresión (2) se reduce a considerar los valores que adopte su exponente n. Entonces: cuanto mayor sea éste, han de obtenerse mayores valores para la función f(x), y viceversa: a valores menores de n resultarán valores también menores para f(x). Inducimos entonces, como primera observación que: la representación gráfica de la función $f(x) = x^n$ tiene variaciones directamente proporcionales a las de su exponente.

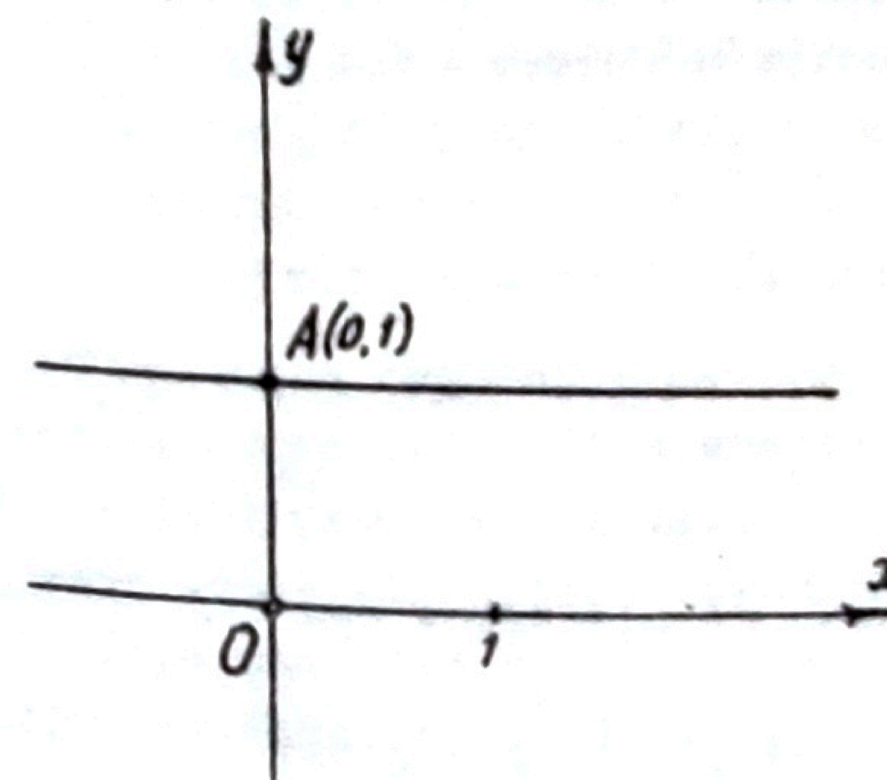
Si $n\geq 0$ resulta f(x) ser función algebraica racional entera; pero, si $n<0$ (exponente negativo) resulta f(x) ser función algebraica racional fraccionaria porque la variable independiente x figura en el denominador al realizarse las operaciones necesarias. Inducimos, pues, como segunda observación que: el exponente n de la función $f(x) = x^n$ debe ser siempre mayor o igual que cero para que la función sea algebraica racional entera.

El intervalo de definición de la función se halla expresado por la desigualdad $-\infty<x<\infty$, o sea $[-\infty,\infty]$; es un intervalo infinito y abierto lo que revela que la variable independiente x puede adquirir cualquier valor real. Inducimos, pues, como tercera observación que: la representación gráfica de la función $f(x) = x^n$ se dispondrá en cualquiera de los cuatro cuadrantes en que los ejes coordenados dividen al plano.

b) TIPO $f(x) = x^0$. Si $n = 0$, la expresión (2) se transforma de la siguiente manera:

$$\boxed{f(x) = x^0 = 1 = \text{constante}}$$

y ello revela que su representación gráfica es una recta paralela al eje de abscisas y de ordenada al origen A(0 , 1).(figura IV.4).-



- figura IV.4 -

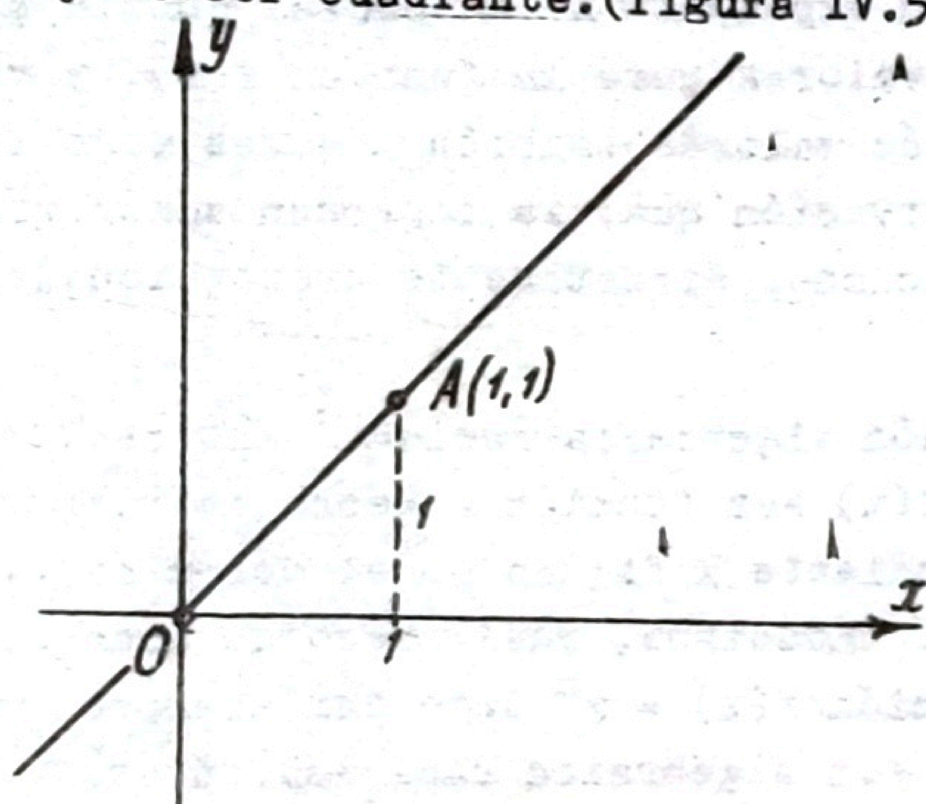
Luego: cuando el exponente n de una función algebraica racional entera del tipo $f(x) = x^n$ es nulo, su representación gráfica es una recta paralela al eje de abscisas y de ordenada al origen A(0 , 1). En consecuencia: para cualquier valor que se asigne a la variable independiente x se obtienen los mismos valores para la función f(x). Por lo tanto: f(x) es función par, o sea que: $-f(x) = f(x)$; además es constante.

Recordamos que por ser la gráfica paralela al eje de abscisas su inclinación y pendiente son nulas (α = m = 0).

c) TIPO $f(x) = x^1$. Si n = 1 la expresión (2) se transforma, quedando así:

$$f(x) = x^1 = x$$

y ello revela que su representación gráfica es una recta bisectriz del primer y tercer cuadrante. (figura IV.5).



- figura IV.5 -

Luego: cuando el exponente n de una función algebraica racional entera del tipo $f(x) = x^n$ es igual a la unidad, su representación gráfica es una recta bisectriz del primer y tercer cuadrante. En consecuencia: a valores opuestos de la variable independiente le corresponden también valores opuestos para la función; ello evidencia que la función f(x) es impar, o sea que: $-f(x) = f(-x)$.

Recordamos que por ser la gráfica una recta bisectriz de los cuadrantes antes mencionados, es su inclinación $\alpha = \frac{\pi}{8}$ y su pendiente igual a la unidad (m = 1).

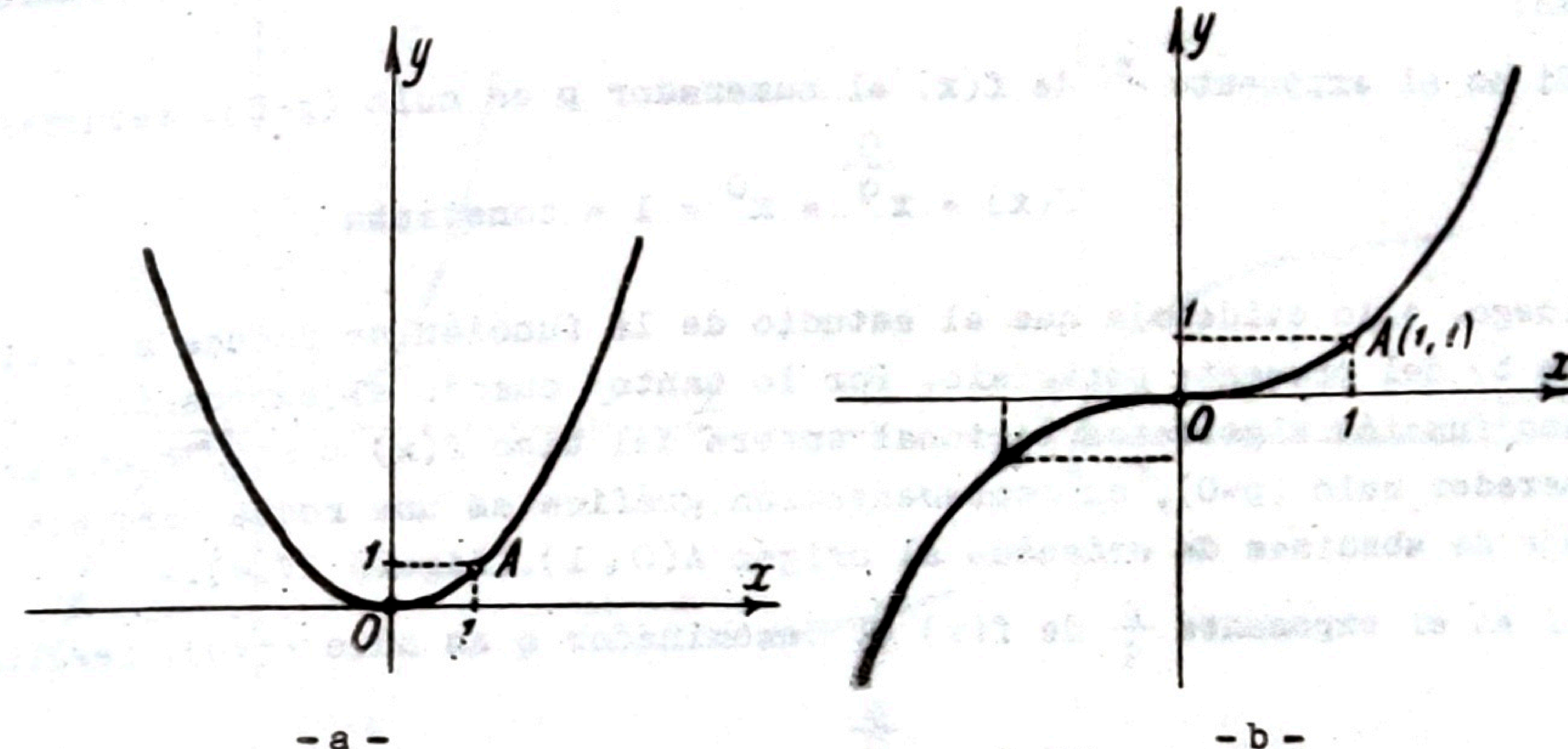
d) TIPO $f(x) = x^n$ (EXPONENTE ENTERO Y POSITIVO). Si $n > 1$ y entero se presentan dos posibilidades dado que puede ser par o impar.

Si $n > 1$, entero y par, para cualquier valor de la variable independiente x resulta f(x) positiva porque las potencias de exponente par de un número positivo o negativo son siempre positivas. La gráfica de la función se sitúa en el primer y segundo cuadrante del plano coordenado, se llama parábola par, pasa siempre por el origen O(o , o) y puntos A(1 , 1), B(-1 , 1), siendo simétrica respecto del eje de ordenadas. (figura IV.6-a).

Se justifica la denominación de parábola par que se da en este caso a la gráfica de la función algebraica racional entera porque la función es par dado que: a valores opuestos de la variable independiente resultan los mismos valores para la función, o sea que: $-f(x) = f(x)$. Corolario: a exponente entero par se obtiene función par, si el tipo es $f(x) = x^n$

Si $n > 1$, entero e impar, la función f(x) tiene por signo el de su variable independiente x. Su gráfica pertenece a los cuadrantes primero y tercero, porque si: $x > 0$, resulta $f(x) > 0$ (primer cuadrante), y si, en cambio, es: $x < 0$, resulta $f(x) < 0$ (tercer cuadrante). También la curva pasa por el origen O(o , o) y el punto A(1 , 1), pero ahora no lo hace por B(-1 , 1), sino por B(-1 , -1). La representación gráfica de la función, simétrica con respecto al origen, se llama parábola impar.

Se justifica la denominación de parábola impar porque la función es impar dado que: a valores opuestos de la variable independiente resultan valores opuestos para la función; o sea que: $-f(x) = f(-x)$.



-a- -b-

- figura IV.6 -

Se advierte que, tanto para $n > 1$ y entero, par o impar, las curvas (figuras IV.6-a y b) pasan por el origen O(o , o) y punto A(1, 1), y en el intervalo $-1 < x < 1$ resultan tangentes al eje de abscisas.

Como en a) del presente parágrafo dijimos que la curva representativa de la función $f(x) = x^n$ tiene variaciones directamente proporcionales a las de su exponente, resulta entonces para la presente eventualidad la siguiente consecuencia:

1. Cuanto mayores son sus exponentes, las ramas de las curvas tanto más próximas se hallan al eje de ordenadas en los intervalos $1 < x < \infty$ $[1 , \infty]$ y $-1 < x < -\infty$ $[-1 , -\infty]$ para valores idénticos de x;
2. Cuanto mayores son sus exponentes las ramas de las curvas tanto más próximas se hallan al eje de abscisas en el intervalo $-1 < x < 1$ $[-1 , 1]$;
3. De la consecuencia 2. se deduce que los segmentos o zonas de tangencia son directamente proporcionales al valor de los exponentes que se consideren.

e) TIPO $f(x) = x^n$ (EXPONENTE FRACCIONARIO Y POSITIVO). Si n es un número fraccionario $\frac{p}{q}$, la función $f(x) = x^n$ se transforma, quedando así:

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} \quad (3)$$

luego:

$$(4) \quad f(x) = \sqrt[q]{x^p} \quad ; \quad y^q = f(x) = x^p \quad (5)$$

expresión la (5) que evidencia la presencia de una función algebraica racional entera por hallarse sometida su variable independiente x a operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencias de exponente entero).

No obstante la aparente irracionalidad de las funciones expresadas en (3) y (4) las utilizaremos por comodidad.

Podemos emprender el estudio de la función presentada en la siguiente forma:

1. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de $f(x)$ el numerador p es nulo (p=0), resulta:

$$f(x) = x^{\frac{0}{q}} = x^0 = 1 = \text{constante}$$

luego, ello evidencia que el estudio de la función se reduce a lo dicho en b) del presente parágrafo. Por lo tanto: cuando el exponente $\frac{p}{q}$ de una función algebraica racional entera del tipo $f(x) = x^{p/q}$ tiene su numerador nulo (p=0), su representación gráfica es una recta paralela al eje de abscisas de ordenada al origen A(0, 1).(figura IV.4).-

2. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de $f(x)$ el denominador q es nulo (q=0), resulta:

$$f(x) = x^{\frac{p}{0}}$$

y ello revela la presencia de una indeterminación; la función carece de sentido y, por lo tanto, no existe representación gráfica. Análogas conclusiones resultan si numerador p y denominador q son nulos (p=q=0).

3. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de $f(x)$ el numerador p es igual a la unidad (p=1) y el denominador q es un número entero positivo, resulta:

$$f(x) = x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$$

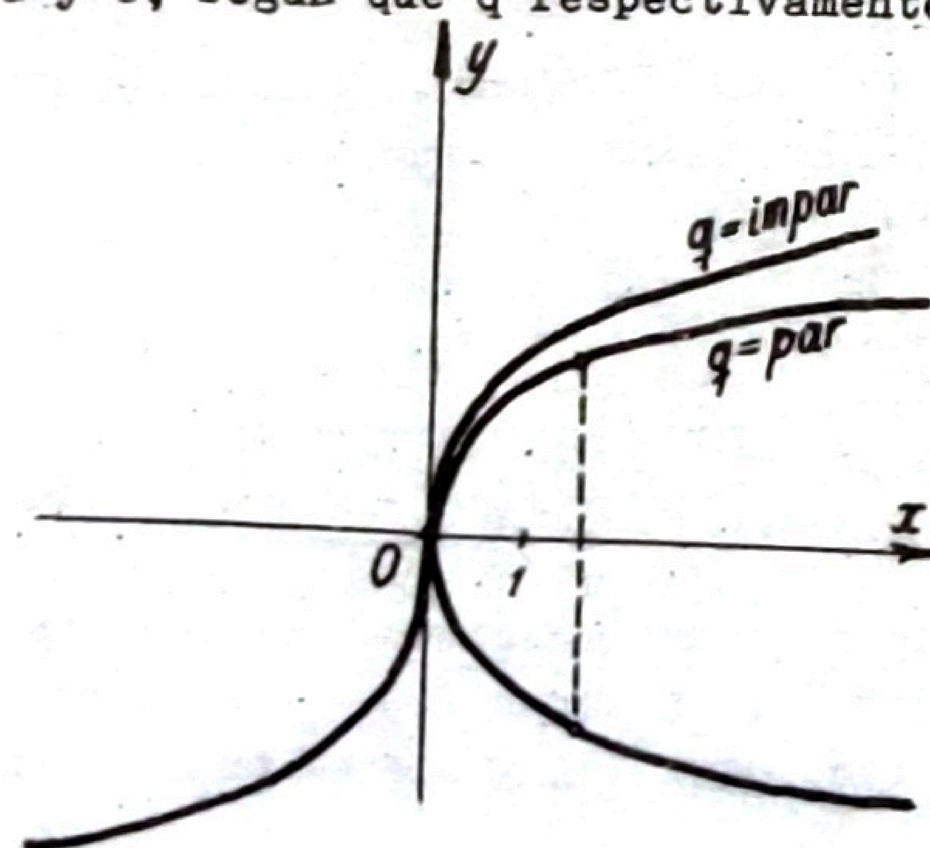
o sea:

$$x = g(y) = y^q \qquad (6)$$

La expresión (6) evidencia que las funciones:

$$y = f(x) = x^n$$
$$x = g(y) = y^q$$

son inversas (siempre que n = q); en consecuencia se deduce que para la expresión(6) corresponden diagramas análogos a los de las figuras IV.6-a y b, según que q respectivamente sea par o impar.(figura IV 7).-



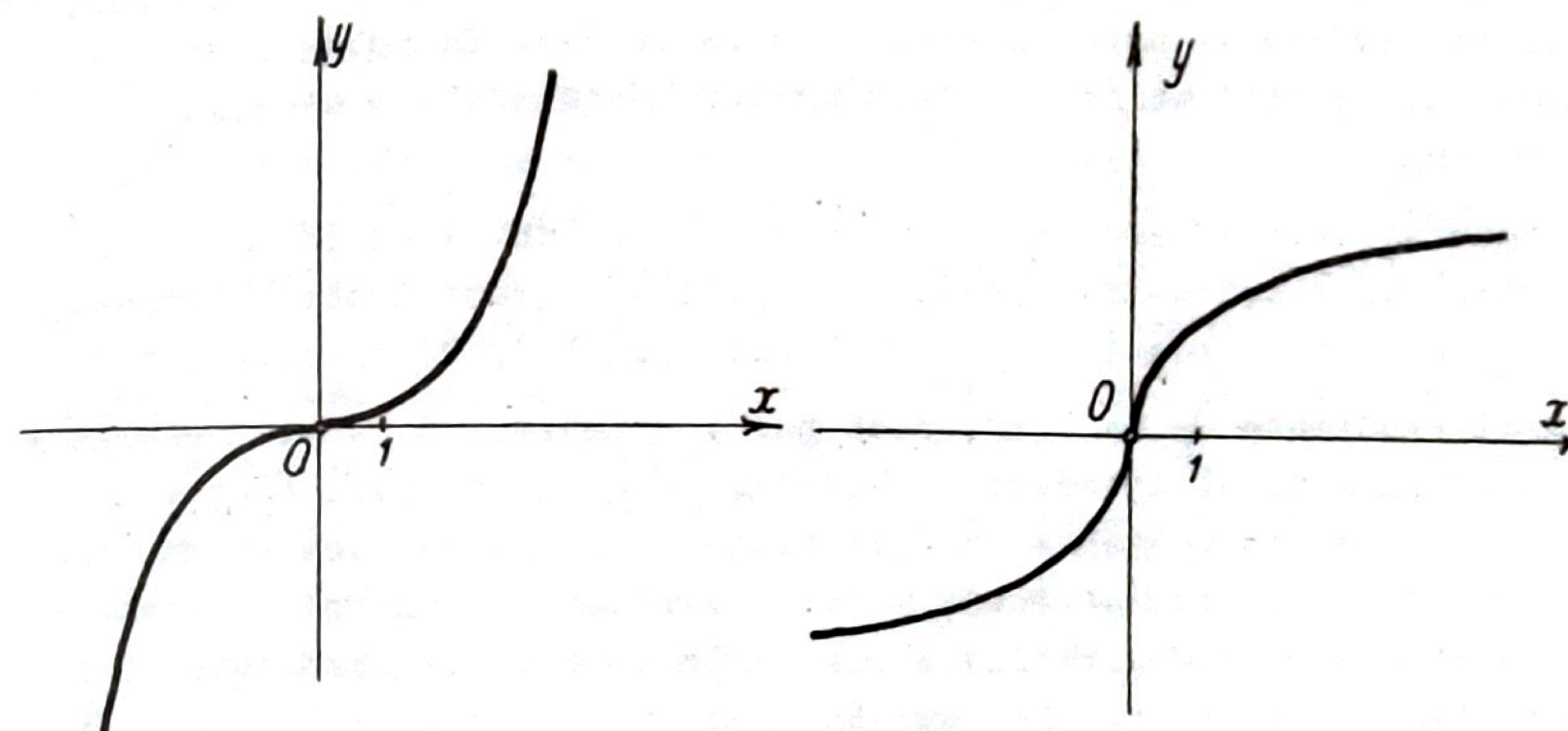
- figura IV.7 -

De la comparación de la figura IV.7 con las IV.6-a y b se aprecia que las gráficas aunque son iguales tienen entre sí sus ejes permutados.

Si q es par g(y) es entonces función par; en cambio, si q es impar g(y) también es función impar.

4. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de $f(x)$, p y q son impares, los signos de la variable independiente y la función son iguales; la función es impar, porque a valores opuestos

de x también corresponden valores opuestos de $f(x)$ y su gráfica, ubicada en los cuadrantes I y III, es simétrica respecto de su origen.(figuras IV.8-a y b).

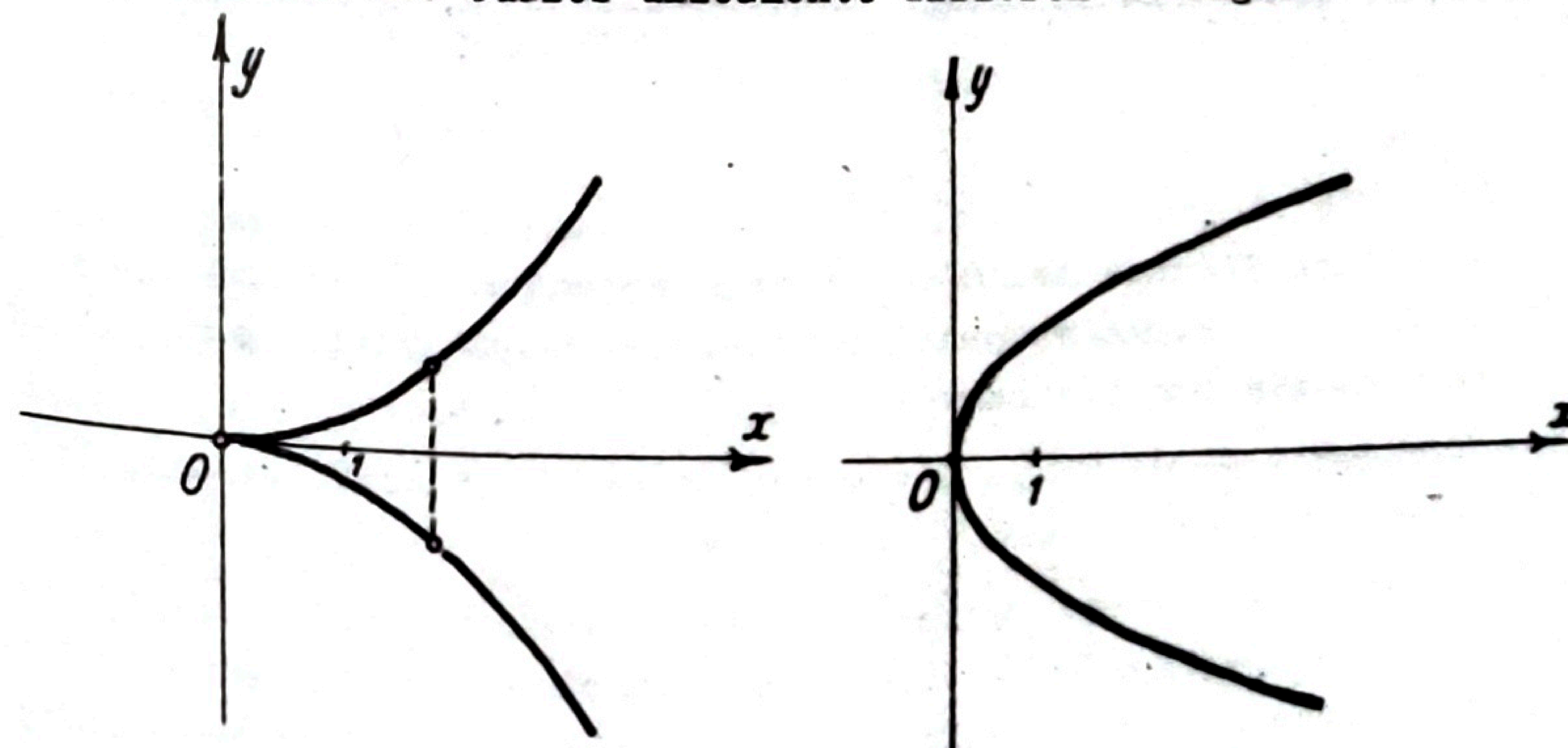


- figura IV.8 -

Cuando p>q resulta la gráfica de la figura IV.8-a; en cambio, si es p<q la curva es la representada en la figura IV.8-b. En ambos casos la gráfica pasa por los puntos O(o , o), A(1 , 1) y B(-1 , -1), resultando tangente al eje de abscisas u ordenadas según que, respectivamente sea $p>q$ ó $p<q$.

5. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de $f(x)$, p es impar y q es par, el intervalo de definición de la función es $0 \leqslant x < \infty$, $(0 , \infty]$, porque en la raíz de índice par el radicando tiene que ser siempre positivo o nulo (ver parágrafo nº IV.3).-

La función $f(x)$ se transforma así: $y = f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \pm \sqrt[q]{x^p}$, donde se advierte la presencia de un doble signo afectando al radical; ello evidencia que los valores de la variable independiente originan dos valores para la función los cuales únicamente difieren en signo.



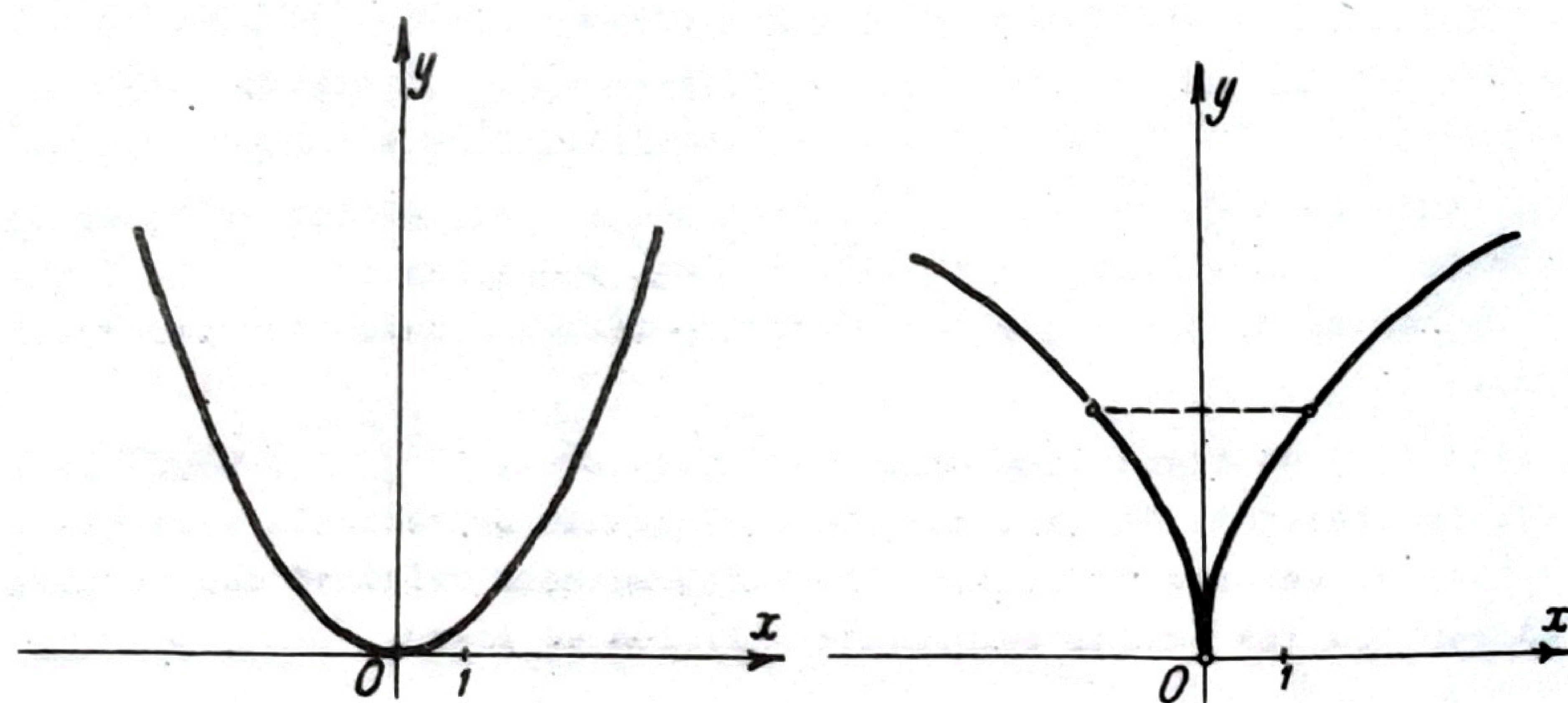
- figura IV.9 -

Los diagramas pertenecen a los cuadrantes I y IV y las curvas son simétricas respecto del eje de abscisas (figuras IV.9-a y b). Si $p>q$ resulta la gráfica que se aprecia en la figura IV.9-a; en cambio, si es $p<q$ resulta la gráfica que se aprecia en la figura IV.9-b. En ambos casos no tiene sentido hablar de función par o impar por la naturaleza de su intervalo de definición.

Las curvas de las figuras IV.9-a y b son tangentes en O(o , o) a los ejes de abscisas y ordenadas, según que, respectivamente, sea $p>q$ ó $p<q$. Pasan, en ambos casos además por los puntos A(1 , 1) y B(1 , -1).-

6. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de f(x), p es par y q impar, la función vuelve a estar definida en el intervalo $-\infty<x<\infty$, $[-\infty, \infty]$; es par, porque a valores opuestos de su variable independiente corresponden los mismos para la función, o sea f(x) = -f(x), y los diagramas son curvas simétricas con respecto al eje de ordenadas que pertenecen a los cuadrantes I y II. Esto último evidencia que la función siempre es positiva.(figuras IV.10 a y b).

   Si es $p>q$ el diagrama que se obtiene es el de la figura IV.10-a; en cambio, si es $p<q$ resulta el de la figura IV.10-b.



- a - - b -

- figura IV.10 -

Las curvas de las figuras IV.10-a y b son tangentes en O(o , o) a los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente, según que $p>q$ ó $p<q$. En ambos casos pasan además por los puntos A(1 , 1) y B(-1 , 1).

7. Si en el exponente $\frac{p}{q}$ de f(x), p y q son pares, la función se simplifica cayéndose en uno de los casos previstos.

f) TIPO $f(x) = -x^n$. Si la variable independiente de f(x) se halla precedida por el signo negativo (-), las representaciones gráficas de la función solamente difieren de las realizadas en b) a e) del presente parágrafo en la ubicación. En efecto: por el signo de la función son simétricas con respecto al eje de abscisas aunque tienen igual valor absoluto.

g) OBSERVACIONES GENERALES. La observación de las curvas representadas en las figuras IV.5 a 10 permite apreciar que, en todos los casos, las gráficas pasan por los puntos origen O(o , o) y A(1 , 1) del sistema de coordenadas cartesianas. Asimismo la observación de las figuras IV.6 a 10 revela que las curvas son tangentes en O a los ejes de abscisas u ordenadas y simétricas con respecto a uno de ellos, según los casos. Se advierte además que, cuando el exponente a que se encuentra afectada la variable independiente es mayor que la unidad (o sea cuando $p>q$ siendo $\frac{p}{q}=n$) la curva es tangente en el origen al eje de abscisas; en cambio lo es al eje de ordenadas si el exponente a que se encuentra afectada la variable independiente es menor que la unidad ($p<q$).

Finalmente, en el cuadro consignado en la página 84 se resume lo dicho.

EJERCICIOS: a) Representar en un mismo gráfico en el intervalo (-3 , 3) las siguientes funciones algebraicas racionales enteras:

$y = f(x) = x^{2/3}$; $y = f(x) = (-x)^{3/5}$

$y = f(x) = x^{3/4}$; $y = f(x) = (-x)^{2/5}$

$y = f(x) = x^{3/5}$; $y = f(x) = -x^3$

$y = f(x) = -x^4$; $y = f(x) = x^{5/4}$

$y = f(x) = x^{7/4}$; $y = f(x) = x^{3/0}$

b) Bosquejar las representaciones gráficas que corresponden a las funciones que a continuación se indican, diciendo previamente en que cuadrantes se situarán las ramas de las curvas correspondientes:

$y = f(x) = -x^5$; $y = f(x) = x^{3/8}$

$y = f(x) = x^5$; $y = f(x) = x^{8/3}$

$y = f(x) = x^{2/7}$; $y = f(x) = x^{5/2}$

$y = f(x) = x^{7/2}$; $y = f(x) = (-x)^{4/5}$

$y = f(x) = -x^4$; $y = f(x) = x^{5/4}$

$y = f(x) = x^{0/3}$; $y = f(x) = x$

Enunciar las propiedades generales de las curvas de ecuación $y = x^n$ para n natural y mayor que 1. Asimismo analizar la influencia de los valores p y q en la representación gráfica de la función $y = f(x) = x^{p/q}$

IV.5.- Función algebraica racional entera: tipo $f(x) = ax^n$.- Cuando la función algebraica racional entera es del tipo:

$$y = f(x) = ax^n$$

o si $n = \frac{p}{q}$.

$$y = f(x) = ax^{\frac{p}{q}} = a\sqrt[q]{x^p}$$

FUNCION $y = f(x) = x^n$

n	Observ.	Int. Definic.	Simetría	Gráfica	
0		$-\infty < x < +\infty$		y, y=1, 0, 1, x	
1		$-\infty < x < +\infty$		y, y=x, 0, 1, x	
≠1	n par	$-\infty < x < +\infty$	respecto el eje de ordenadas.—	y, 0, 1, x	
≠1	n impar	$-\infty < x < +\infty$	respecto del origen.—	y, 0, 1, x	
$n = p/q$	$p = 0$	$-\infty < x < +\infty$		y, y=1, 0, 1, x	
$n = p/q$	$q = 0$	carece de sentido.—			
$n = p/q$	p impar q impar	$-\infty < x < +\infty$	respecto del origen.—	$n>1$ $(p>q)$	$n<1$ $(p<q)$
				y, 0, x	y, 0, x
$n = p/q$	p par q impar	$-\infty < x < +\infty$	respecto del eje de ordenadas.—	$n>1$ $(p>q)$	$n<1$ $(p<q)$
				y, 0, x	y, 0, x
$n = p/q$	p impar q par	$0 \leq x < +\infty$	respecto del eje de las abscisas.—	$n>1$ $(p>q)$	$n<1$ $(p<q)$
				y, 0, x	y, 0, x

o sea cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$, las representaciones gráficas correspondientes son análogas a las realizadas en el parágrafo IV.4-b) a f). El coeficiente a no produce mayores alteraciones en las formas de las curvas sino que solamente actúa sobre la curva empinándola o achatándola según sea su valor.

Por lo general también en estos casos el intervalo de definición de la función viene dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$, $[-\infty, \infty]$, pero la función está definida en el intervalo $0 \leq x < \infty$, $(0, \infty)$ cuando es q par.

IV.6.- **Función algebraica racional entera: expresión general.-** Sea la expresión general de la función algebraica racional entera:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

estará definida, por lo general, en el intervalo $[-\infty, \infty]$, $-\infty < x < \infty$.

Si los exponentes que afectan la variable independiente son valores naturales, la correspondiente representación gráfica de la función la indica el exponente de mayor grado a que se encuentra afectada aquélla. La forma de la curva es una parábola y los términos restantes que integran la ecuación de la función -excluído el que indica su grado- solo producen alteraciones de alguna importancia en su forma y ubicación que no corresponde señalar ahora.

En los parágrafos siguientes realizamos un exhaustivo estudio, que sirve a manera de guía, con la función de segundo grado. Ello permitirá apreciar la forma de encarar el estudio y representación gráfica de funciones algebraicas racionales enteras complicadas.

IV.7.- **Función algebraica racional entera de segundo grado.-** Sea la función algebraica racional entera de segundo grado:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

las raíces de la ecuación de la función, que son los valores que sustituídos por la variable independiente anulan la ecuación, están dados por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

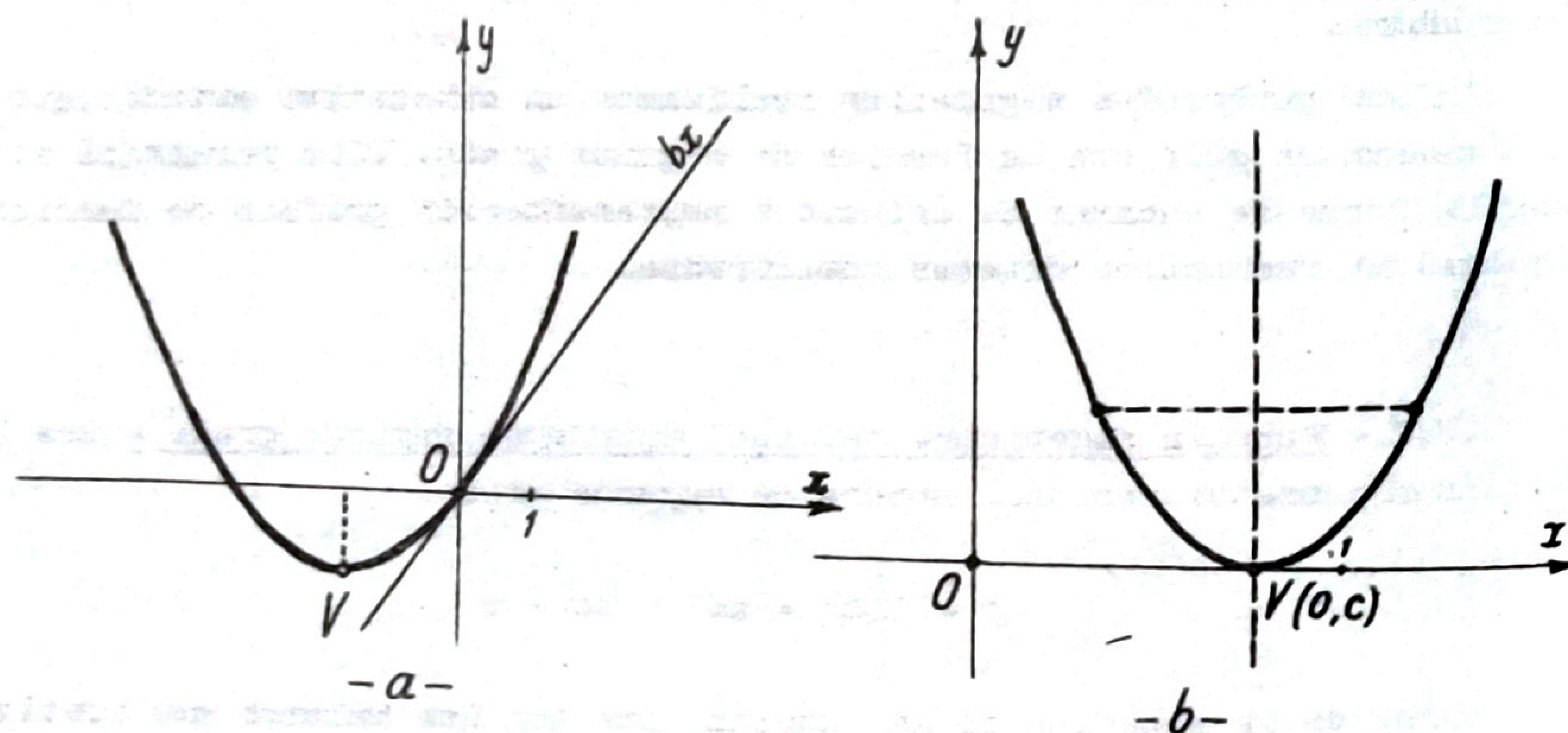
De acuerdo con lo dicho en los parágrafos IV.4 y 6 la representación gráfica de la función es una parábola que ahora se llama cuadrática.

Analicemos las variantes que presenta la función algebraica racional entera de segundo grado según los valores que tomen los coeficientes de su ecuación:

1. **Anulación del coeficiente del término lineal y el término independiente.** Cuando los coeficientes b y c de la ecuación de la función se anulan ($b = c = 0$), la relación $y = f(x) = ax^2$ indica la función. Definida en el intervalo $[-\infty, \infty]$, $-\infty < x < \infty$, como a valores opuestos de la variable independiente corresponden los mismos para la función, ésta es, entonces, función par, es decir que se verifica la relación $f(x) = f(-x)$. La curva es una parábola par que pasa por el origen $O(0, 0)$ y puntos $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, siendo tangente en O al eje de abscisas y simétrica con respecto al eje de ordenadas.(figura IV.13
2. **Anulación del término independiente.** Cuando el término independiente c de la ecuación que expresa el valor de la función se anula ($c = 0$), ésta se compone de un término cuadrático y otro lineal:

$$y = f(x) = ax^2 + bx$$

también está definida en el intervalo $[-\infty, \infty]$, $-\infty < x < \infty$, y su gráfica es una parábola que se diferencia de la representada en la figura IV.13 porque en el origen resulta tangente a la recta $y = bx$, en lugar de serlo al eje de abscisas, y porque su vértice se halla desplazado del origen del sistema de coordenadas al punto $V(\alpha, \beta) \equiv V\left[-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2}{4a}\right]$, debido a la influencia que ejerce el término lineal.(figura IV.11-a).



- figura IV.11 -

3. **Anulación del término lineal.** Cuando el coeficiente b del término lineal se anula ($b = 0$), la función se compone de un término cuadrático y otro independiente:

$$y = f(x) = ax^2 + c$$

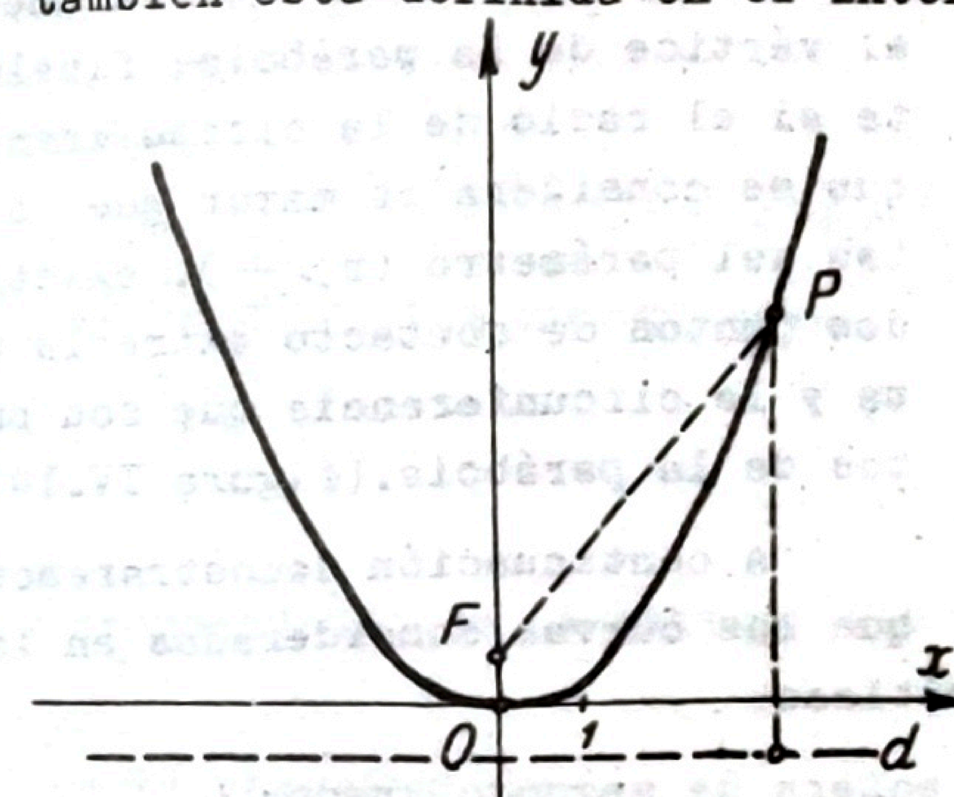
Está definida en el intervalo $[-\infty, \infty]$, $-\infty < x < \infty$, y su representación gráfica se halla desplazada sobre el eje de abscisas a la distancia c del origen del sistema de coordenadas, de manera tal que entonces su vértice es el punto $V(\alpha, \beta) \equiv V(0, c)$, debido a la influencia que ejerce sobre el término cuadrático el independiente.(figura IV.11-b).

4. **forma general.** Cuando la función se presenta en la forma general:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

también está definida en el intervalo $[-\infty, \infty]$, $-\infty < x < \infty$. Su gráfica al cortar al eje de ordenadas lo hace de forma que, en tal punto, la pendiente de la recta tangente a la curva es igual al coeficiente b; su vértice es el punto de coordenadas:

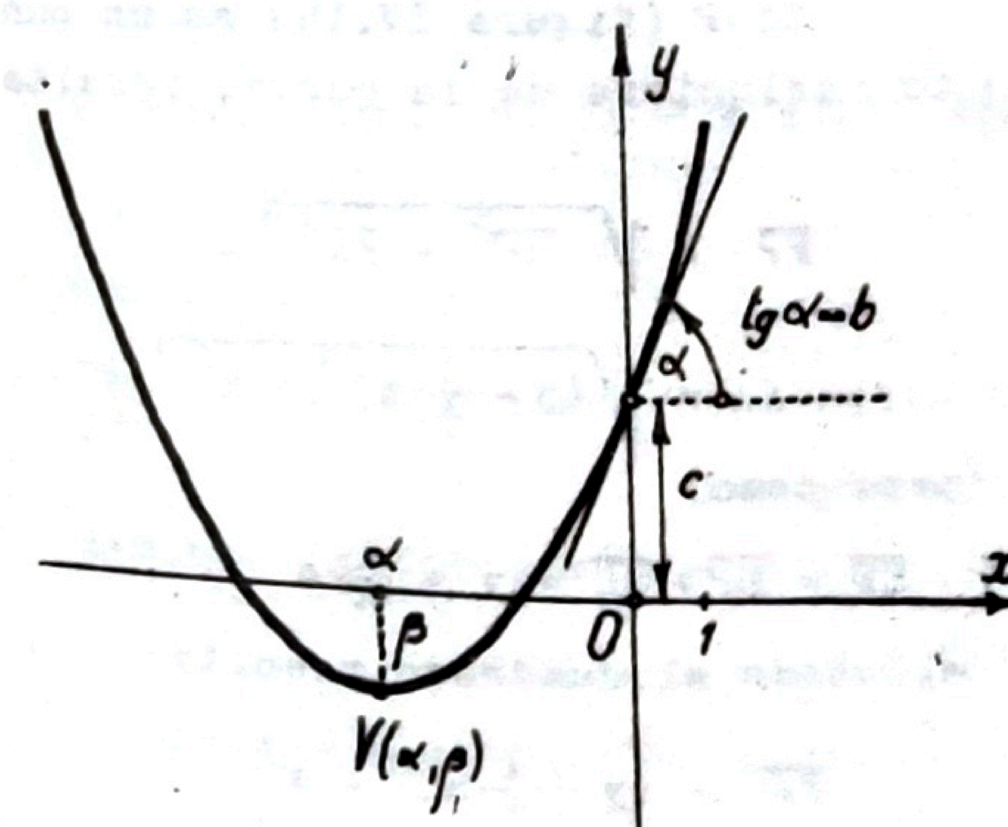
$$V(\alpha, \beta) \quad V\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right]$$



- figura IV.12 -

porque los términos lineal e independiente si bien no alteran la curva producen variaciones de alguna importancia.(figura IV.12).

5. Si el coeficiente a del término cuadrático es negativo en la ecuación de la función, ésta tiene por representación gráfica, según los casos, una curva análoga a las de las figuras IV.11 a 13, pero simétrica de ellas con respecto al eje de abscisas.
6. **observación.** El término cuadrático no puede faltar porque entonces la función es lineal.



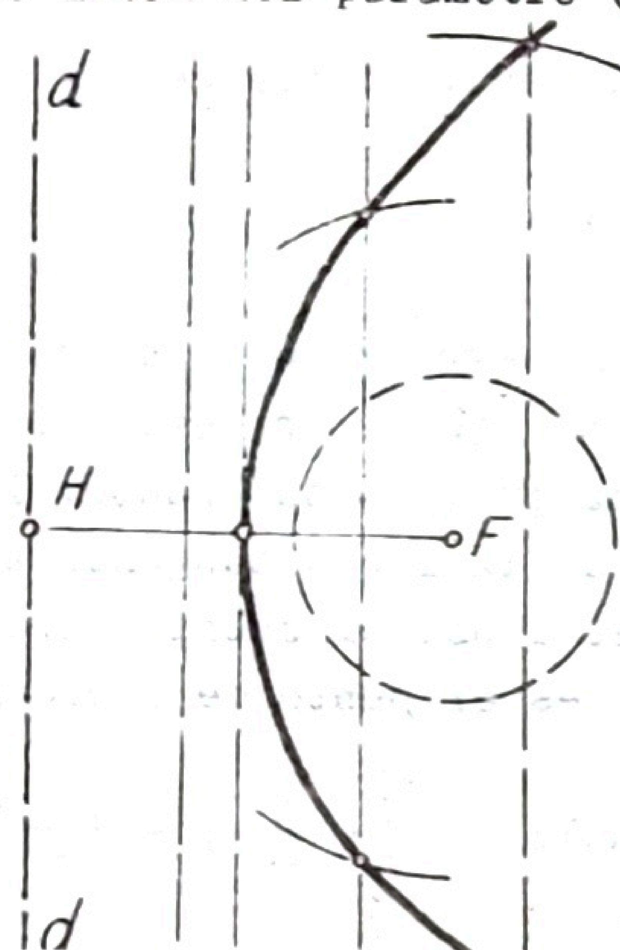
- figura IV.13 -

La parábola cuadrática se define geométricamente como: el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta d, llamada directriz, y de un punto F no perteneciente a ésta, llamado foco.(figura IV.13).

En efecto: sea una recta cualquiera d y un punto F que no le pertenece. Se determina fácilmente la posición de la parábola mediante el trazado de puntos, cortando a rectas paralelas a d con circunferencias de centros en F y radios sucesivamente iguales a las distancias entre la directriz y las paralelas a éstas que se consideran.(figura IV.14).

Es el indicado también un método gráfico para construir la parábola.

El segmento FH, distancia del foco a la directriz, se llama **parámetro** p de la parábola. Si el radio r de la circunferencia considerada es menor que la mitad del parámetro ($r < \frac{p}{2}$) no existe punto de intersección entre la recta y la circunferencia; si el radio de la circunferencia es igual a la mitad del parámetro ($r = \frac{p}{2}$) hay un solo punto de intersección entre la recta y la circunferencia que es el vértice de la parábola; finalmente si el radio de la circunferencia que se considera es mayor que la mitad del parámetro ($r > \frac{p}{2}$), existen dos puntos de contacto entre la recta y la circunferencia que son puntos de la parábola.(figura IV.14).



- figura IV.14 -

A continuación demostraremos que las curvas consideradas en las figuras IV.11 a 13 son parábolas cuadráticas:

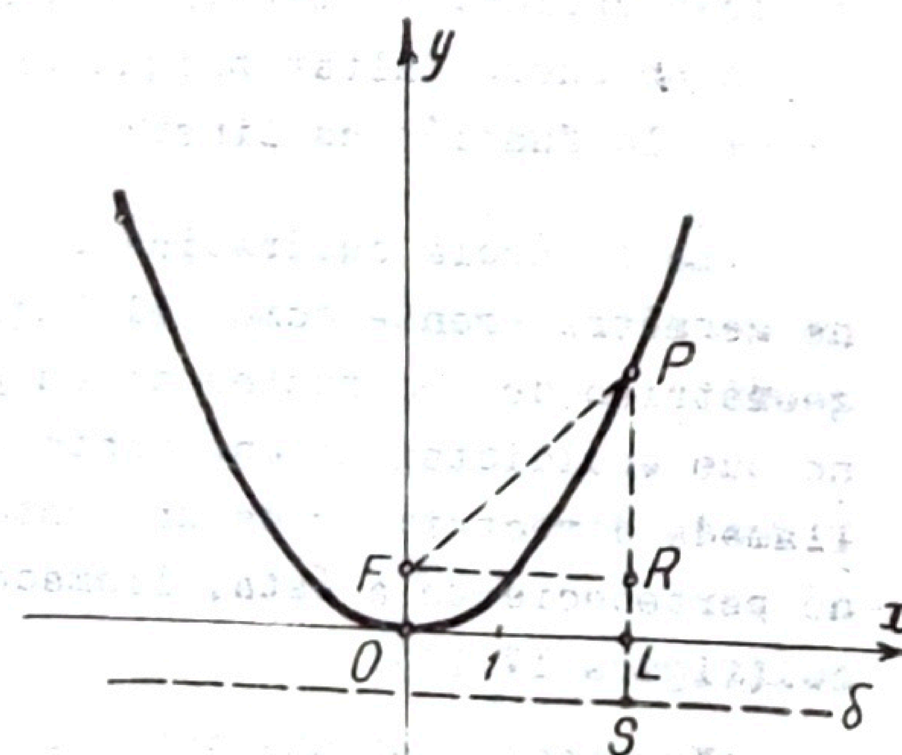
1. Sea la función algebraica racional entera de segundo grado:

$$y = f(x) = ax^2$$

y consideremos sobre un plano coordenado un punto $F(0, \frac{1}{4}a)$ y una recta d cuya ecuación sea:

$$x = f(a) = -\frac{1}{4}a$$

Si P (figura IV.15) es un punto cualquiera de la curva, resulta:



- figura IV.15 -

$$\overline{FP} = \sqrt{\overline{RP}^2 + \overline{FR}^2} =$$

$$= \sqrt{(y - \frac{1}{4}a)^2 + x^2}$$

pero como:

$$\overline{SP} = \overline{LP} + \overline{SL} = y + \frac{1}{4}a$$

elevando al cuadrado resulta:

$$\overline{FP}^2 = (y - \frac{1}{4}a)^2 + x^2$$

$$\overline{SP}^2 = (y + \frac{1}{4}a)^2$$

luego, desarrollando los cuadrados, simplificando y teniendo en cuenta que $y = x^2$ resulta $\overline{FP} = \overline{SP}$ y, por lo tanto, la curva es una parábola por ser el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta y un punto que no le pertenece.

2. Sea la función algebraica racional entera de segundo grado:

$$y = f(x) = ax^2 + bx$$

sacando factor común a queda:

$$y = f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x)$$

sumando y restando la expresión $b^2/4a$ resulta:

$$y = f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) =$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$$

luego:

$$y + \frac{b^2}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$$

introduciendo las notaciones:

$$X = (x + \frac{b}{2a})$$

$$Y = y + \frac{b^2}{4a}$$

y reemplazando en la expresión anterior:

$$Y = aX^2$$

que es una parábola.

3. Sea la función algebraica racional entera de segundo grado:

$$y = f(x) = ax^2 + c$$

sacando factor común a queda:

$$y = f(x) = a(x^2 + \frac{c}{a})$$

haciendo:

$$Y = y - \frac{c}{a}$$

y reemplazando en la expresión anterior:

$$Y = ax^2$$

que es una parábola.

4. Sea la función algebraica racional entera de segundo grado:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

sacando factor común a queda:

$$y = f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

sumando y restando la expresión $b^2/4a$ resulta:

$$y = f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

haciendo:

$$X = (x + \frac{b}{2a})$$

$$Y = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

y reemplazando en la expresión anterior:

$$Y = aX^2$$

que es una parábola.

IV.8.- <u>Valor máximo y mínimo de la función de segundo grado.-</u> Dada la función:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

en el parágrafo IV.7 vimos que las coordenadas del vértice son $V(\alpha, \beta) \equiv V\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$, luego: el punto V será el punto mínimo en el caso de que $a > 0$ y punto máximo si es $a < 0$.

Los puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas se determinan analíticamente resolviendo la ecuación de la función mediante la aplicación de la fórmula:

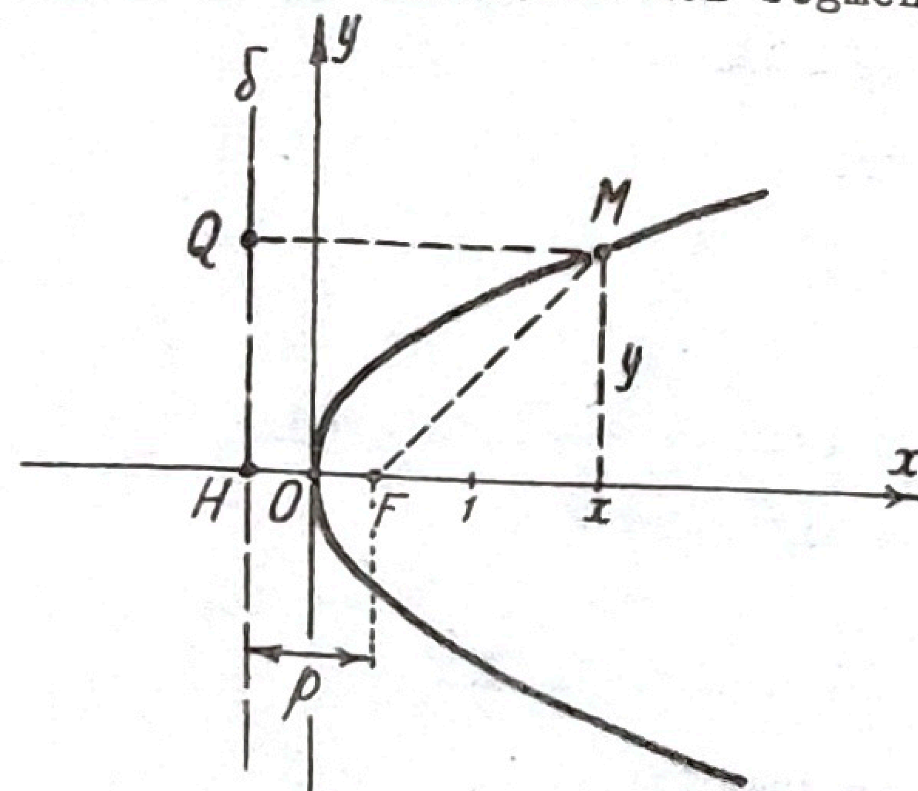
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO: a) Calcular las coordenadas del punto para el cual el trinomio $(3x^2 + x - 2)$ es máximo o mínimo. En este caso resulta $a = 3$, $b = 1$ y $c = -2$, luego:

$$V\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right] = V\left[-\frac{1}{6}, -\frac{25}{12}\right]$$

y como $a = 3$ el punto V es punto mínimo.

IV.9.- <u>Ecuación de la parábola como función de segundo grado.-</u> Sea una parábola en la posición que indica la figura IV.16, donde el eje de abscisas se considera perpendicular a la directriz pasando por F y donde el eje de ordenadas es mediatriz del segmento FH.



- figura IV.16 -

Si el foco F queda a la derecha del origen del sistema de coordenadas resulta definido por el par de números $F(\frac{p}{2}, 0)$ en tanto que la directriz tiene por ecuación la expresión $x = -\frac{p}{2}$.

Sea un punto $M(x, y)$ genérico de la parábola. Como $\overline{FM} = \overline{QM}$, siendo $Q(-\frac{p}{2}, y)$, la proyección de M sobre la directriz, si aplicamos la expresión que permite calcular la distancia entre dos puntos, resulta:

$$(x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \tfrac{p}{2})^2$$

luego, desarrollando los cuadrados y simplificando queda:

$$y^2 = 2px$$

que es la forma normal de la ecuación de la parábola, o sea:

$$y = \pm\sqrt{2px}$$

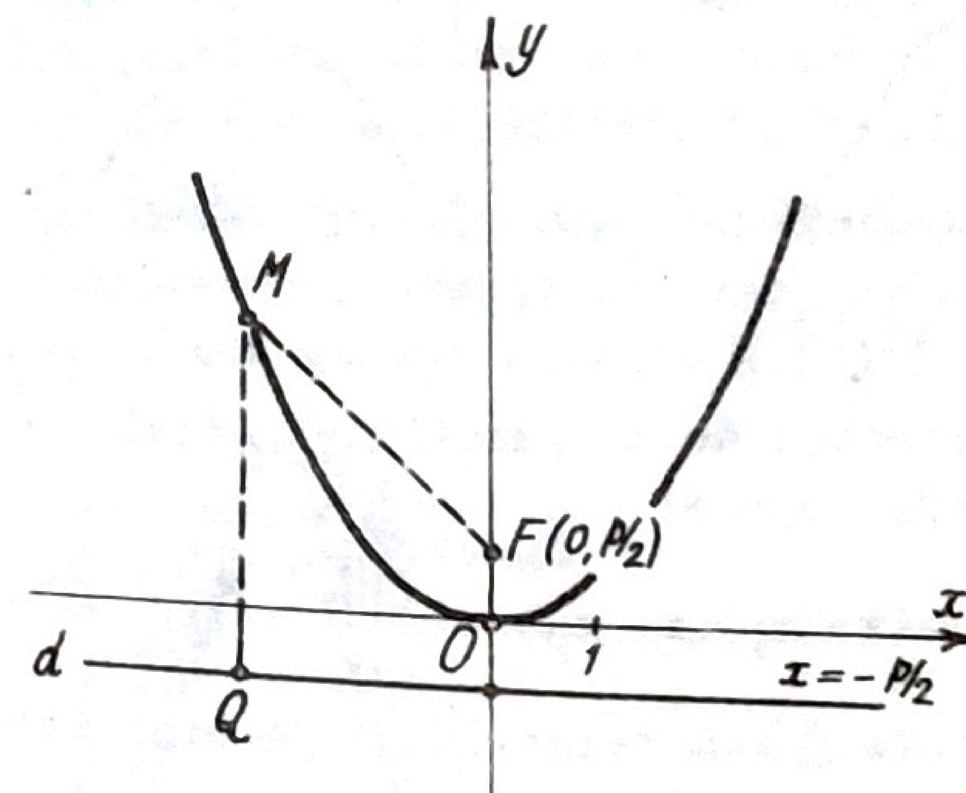
que es la forma implícita, utilizada para su discusión.

En las condiciones enunciadas, es decir cuando el foco está situado sobre el semieje positivo de abscisas, resulta $p > 0$ y entonces debe ser $x > 0$ para que la función tenga solución en el campo de los números reales y además para que todos los puntos de la curva se sitúen a la derecha del eje de ordenadas.

Cuando $x = 0$ resulta $y = 0$ y el origen O del sistema de coordenadas cartesianas pertenece a la curva.

Cuando el foco se sitúa sobre el semieje negativo de abscisas, resulta $p < 0$ y entonces debe ser $x < 0$ para que la función tenga solución en el campo de los números reales y además para que todos los puntos de la curva se sitúen a la izquierda del eje de ordenadas.

En resumen: cualquiera de las parábolas de la familia que se obtienen considerando variable el parámetro p de la ecuación $y = \pm\sqrt{2px}$ tiene por eje de simetría al de abscisas, que recibe ahora el nombre de eje de la parábola; la curva tiene común con dicho eje un solo punto, el origen O del sistema de coordenadas que puede considerarse como simétrico de sí mismo, y el foco se sitúa sobre el eje de abscisas a una distancia $\frac{p}{2}$ del vértice.



- figura IV.17 -

Repitiendo el razonamiento hecho para la figura IV.16, tendremos cuando el eje de la parábola es vertical (figura IV.17) que la ecuación correspondiente es $y = \frac{1}{2p}x^2$, y haciendo $\frac{1}{2p} = a$, resulta la ya conocida expresión:

$$y = ax^2$$

En tal caso, si $p > 0$ resulta $a > 0$ y para cualquier valor de x resulta $y > 0$; en consecuencia: las ramas de la curva se hallan orientadas hacia arriba.

Si $p < 0$ es $a < 0$ y siempre será $y < 0$; en consecuencia las ramas de la curva se encuentran orientadas hacia abajo.

IV.10.- <u>Consideraciones interesantes sobre la función algebraica racional entera de segundo grado.-</u> Sea la función:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

las raíces de su ecuación están dadas por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

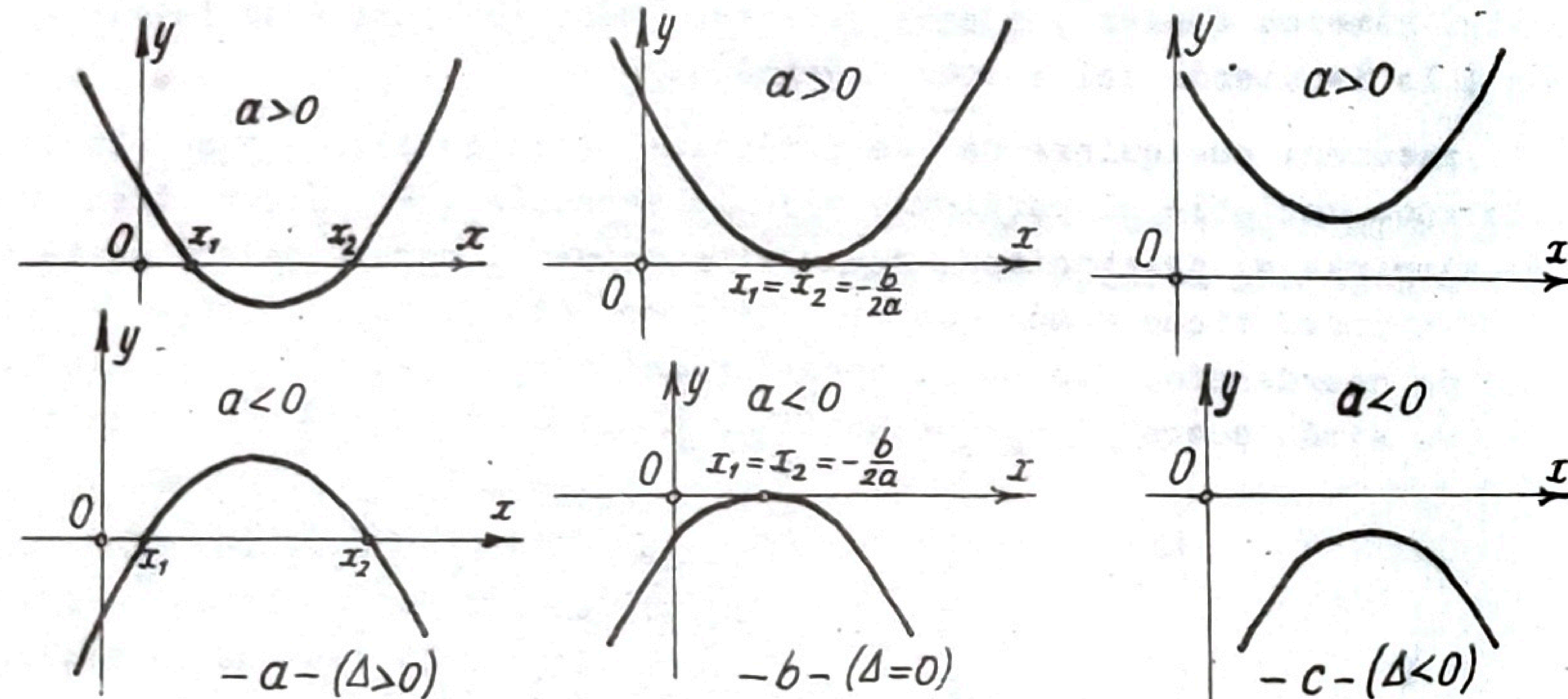
donde la expresión $b^2 - 4ac = \Delta$ se llama discriminante de la ecuación y hace posible estudiar la naturaleza de sus raíces y, por lo tanto, la orienta-

ción de la curva.

En efecto: cuando $\Delta > 0$ se obtienen dos raíces reales y distintas. Gráficamente la parábola representativa corta al eje de abscisas en dos puntos distintos (figura IV.18-a).

Cuando $\Delta = 0$ se obtiene como raíz un valor único. Gráficamente la parábola tiene su vértice sobre el eje de abscisas en un punto de coordenadas $(-\frac{b}{2a}, 0)$.(figura IV.18-b)

Cuando $\Delta < 0$ se obtienen dos raíces complejas. Gráficamente la parábola representativa no corta al eje de abscisas.(figura IV.18-c).



- figura IV.18 -

Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación de la función algebraica racional entera de segundo grado, y recordando que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

analicemos la influencia del discriminante Δ con relación al término independiente x y, según los valores que adquieran, las variantes gráficas que pueden producirse:

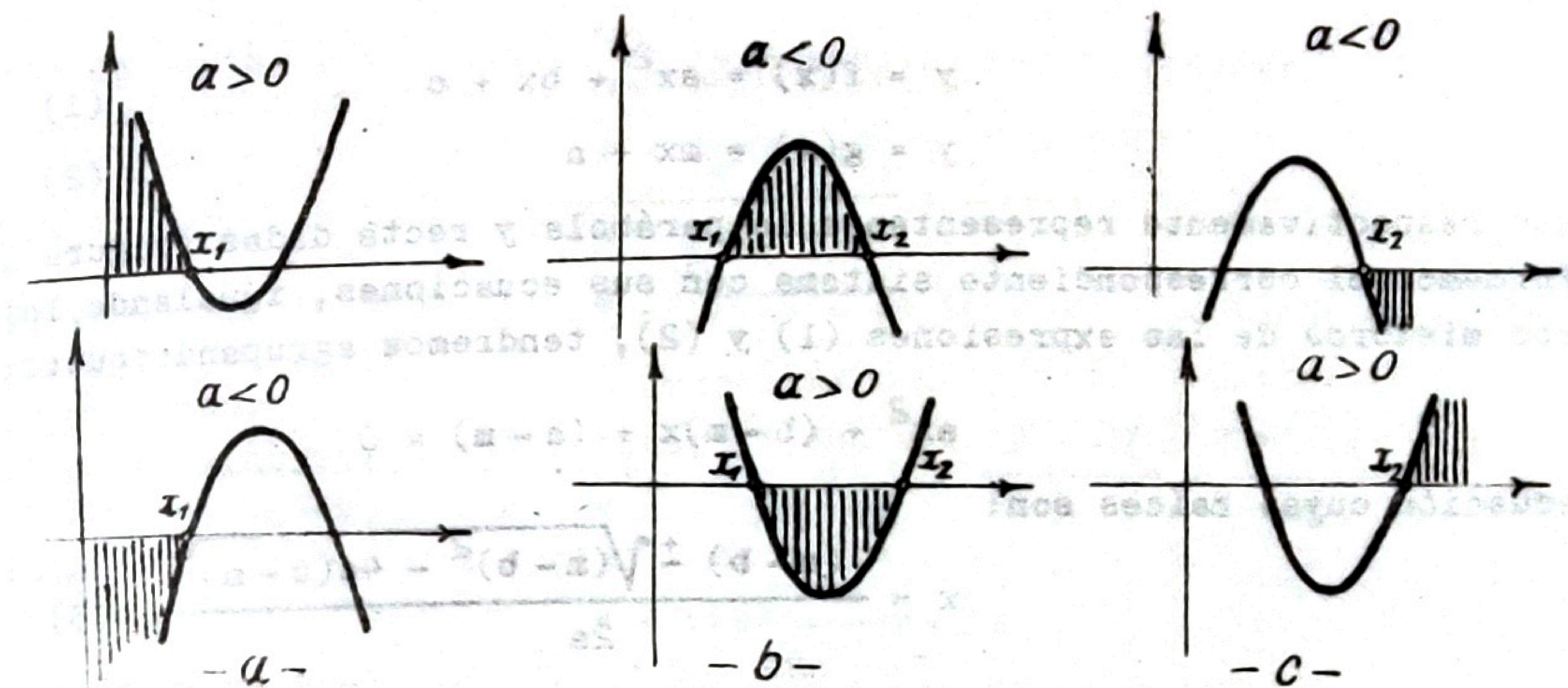
a) supongamos que $x_1 < x_2$, por la expresión (1) resulta:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

en consecuencia, cuando $\Delta > 0$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. cuando $x < x_1$, las diferencias $x - x_1$ y $x - x_2$ serán menores que cero, y por lo tanto: f(x) tendrá el mismo signo que el coeficiente a;
2. Cuando x asuma un valor intermedio entre x_1 y x_2, la diferencia $x - x_1$ será mayor que cero, en tanto que $x - x_2$ será negativa; luego: f(x) tendrá signo contrario al coeficiente a;
3. cuando $x > x_2$, las diferencias $x - x_1$ y $x - x_2$ serán mayores que cero, y por lo tanto: f(x) tendrá el mismo signo que el coeficiente a.

Gráficamente la posibilidad 1 se aprecia en la figura IV.19-b y la 3 en la IV.19-c.



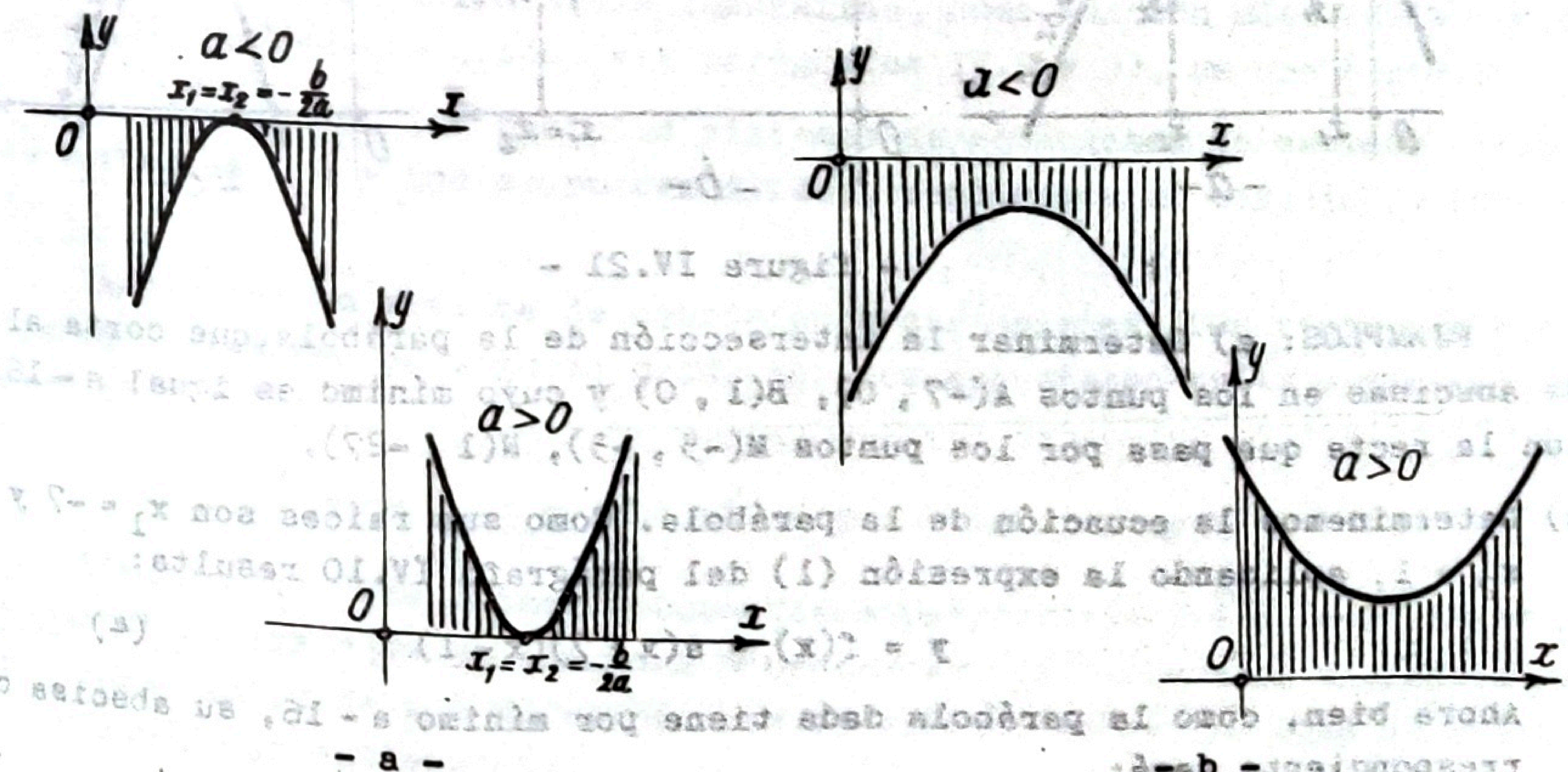
- figura IV.19 -

b) supongamos que $\Delta = C$, entonces $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ y la expresión (1) se transforma así:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2$$

Ahora bien, como la diferencia $(x - x_1)^2$ ó $(x - x_2)^2$ siempre es positiva para cualquier valor de x, resulta que f(x) tiene el mismo signo que el coeficiente a. Gráficamente se obtiene la figura IV.20-a.-

c) supongamos que $\Delta < 0$, entonces se obtienen dos raíces reales complejas conjugadas y cualquiera sea el valor de x siempre f(x) tiene el mismo signo que el coeficiente a. Gráficamente se obtiene la figura IV.20-b.-



- figura IV.20 -

IV.11.- <u>Intersección de parábola y recta.-</u> Para determinar los puntos de intersección de una parábola y una recta, analíticamente deben hallarse las raíces del sistema de ecuaciones formado por la parábola y recta dadas. En efecto: sean las funciones

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

$$y = g(x) = mx + n \qquad (2)$$

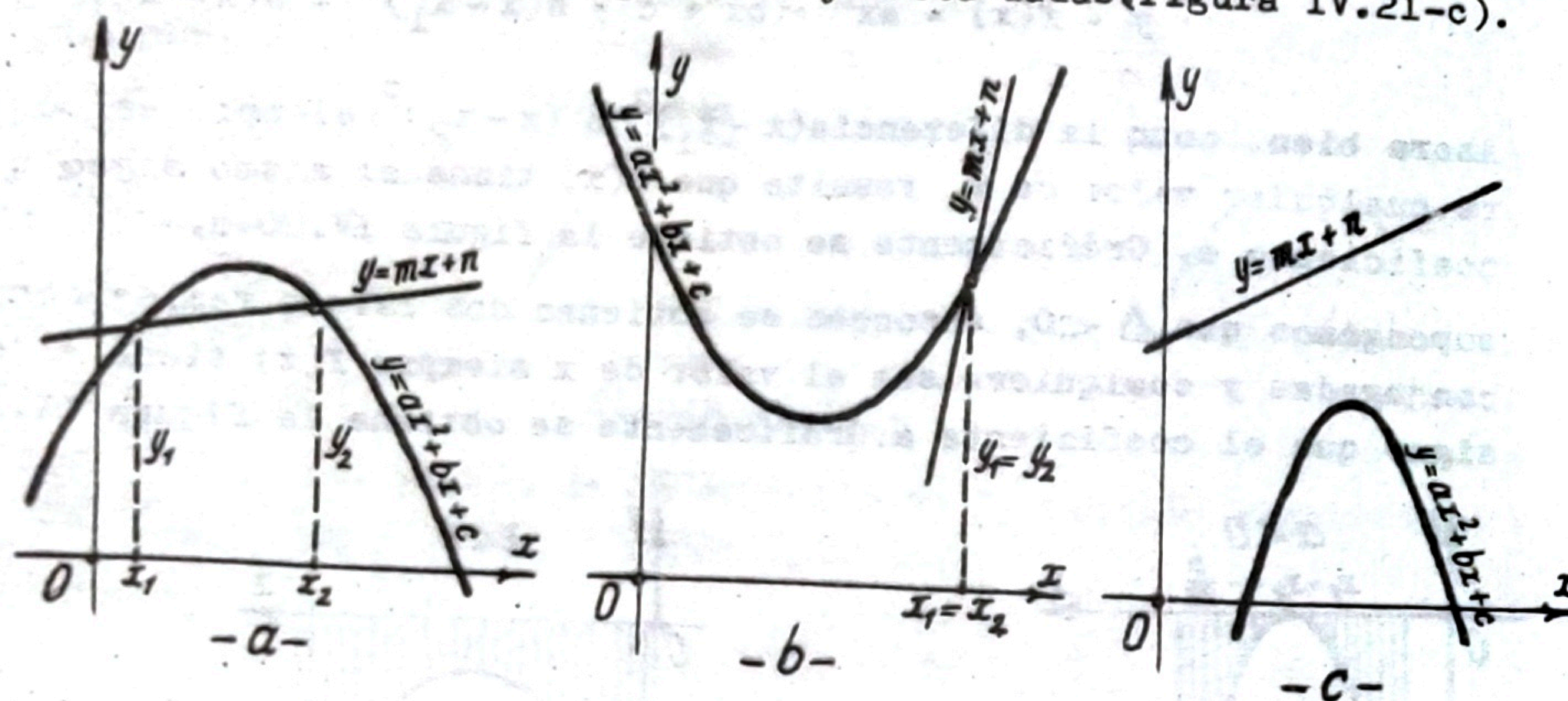
que respectivamente representan a la parábola y recta dadas (figura IV.21). Formemos el correspondiente sistema con sus ecuaciones, igualando los primeros miembros de las expresiones (1) y (2), tendremos agrupando que:

$$ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$$

ecuación cuyas raíces son:

$$x = \frac{(m-b) \pm \sqrt{(m-b)^2 - 4a(c-n)}}{2a} \qquad (3)$$

Si de la expresión (3) surgen dos raíces reales y distintas, se obtienen dos puntos de intersección (figura IV.21-a) entre la parábola y la recta dadas; si las raíces son coincidentes, resulta un solo punto común (figura IV.21-b); finalmente si las raíces son complejas conjugadas, no existe punto de intersección entre la parábola y recta dadas (figura IV.21-c).



- figura IV.21 -

EJEMPLOS: a) Determinar la intersección de la parábola, que corta al eje de abscisas en los puntos A(-7 , 0), B(1 , 0) y cuyo mínimo es igual a - 16, - con la recta que pasa por los puntos M(-5 , -3), N(1 , -27).

a) Determinemos la ecuación de la parábola. Como sus raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 1$, aplicando la expresión (1) del parágrafo IV.10 resulta:

$$y = f(x) = a(x+7)(x-1) \qquad (4)$$

Ahora bien, como la parábola dada tiene por mínimo a - 16, su abscisa correspondiente será:

$$x_{min} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-7+1}{2} = -3$$

luego:

$$y_{min} = a(-3+7)(-3-1) = -16$$

$$a = 1$$

y, por lo tanto, reemplazando en la expresión (4) se obtiene:

$$y = f(x) = x^2 + 6x - 7 \qquad (5)$$

que es la ecuación de la parábola buscada.

b) Determinemos la ecuación de la recta. De acuerdo a lo dicho en el parágrafo III.6 resulta:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad \frac{y + 27}{24} = \frac{x - 1}{-6}$$

luego:

$$y = f(x) = -4x - 23 \qquad (6)$$

c) Determinemos los puntos de intersección de la parábola y recta dadas.- Formemos el sistema con las expresiones (5) y (6) e igualemos:

$$x^2 + 6x - 7 = -4x - 23$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

luego: $x_1 = -8$, $x_2 = -2$ que sustituídos por sus correspondientes en una de las ecuaciones del sistema dan $y_1 = 9$, $y_2 = -15$. Por lo tanto: la parábola y recta dadas se cortan en los puntos $P_1(-8 , 9)$ y $P_2(-2 , -15)$.-

IV.12.- Cónicas.- Las cónicas son las curvas cuya ecuación es un polinomio de segundo grado en las dos variables, x, y, igualado a cero.

En tal sentido la parábola cuadrática, como función algebraica racional entera de segundo grado (ver parágrafos IV.7 y 9), es una cónica.

De acuerdo con los posibles sistemas de ecuaciones de segundo grado en las variables x e y que se pueden formar, realicemos el estudio de las cónicas.

Imaginemos un sistema de coordenadas cartesianas. Los tipos más simples de ecuaciones de segundo grado son los que tienen un solo término, o sea:

$$y^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \quad ; \quad xy = 0$$

Mientras las dos primeras ecuaciones respectivamente se satisfacen para puntos de los ejes de abscisas y ordenadas, la tercera se satisface para valores nulos de x ó y, ubicándose su gráfica sobre los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente.

Si consideramos las posibles ecuaciones de segundo grado con dos términos, tendremos:

$$y^2 + ax^2 = 0 \quad ; \quad y^2 + axy = 0 \quad ; \quad y^2 + ay = 0$$

$$y^2 + ax = 0 \quad ; \quad y^2 + a = 0 \quad ; \quad xy + ax = 0$$

$$xy + a = 0$$

además de los que se obtienen al permutar en estos tipos la variable x con la y.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

$$y = g(x) = mx + n \qquad (2)$$

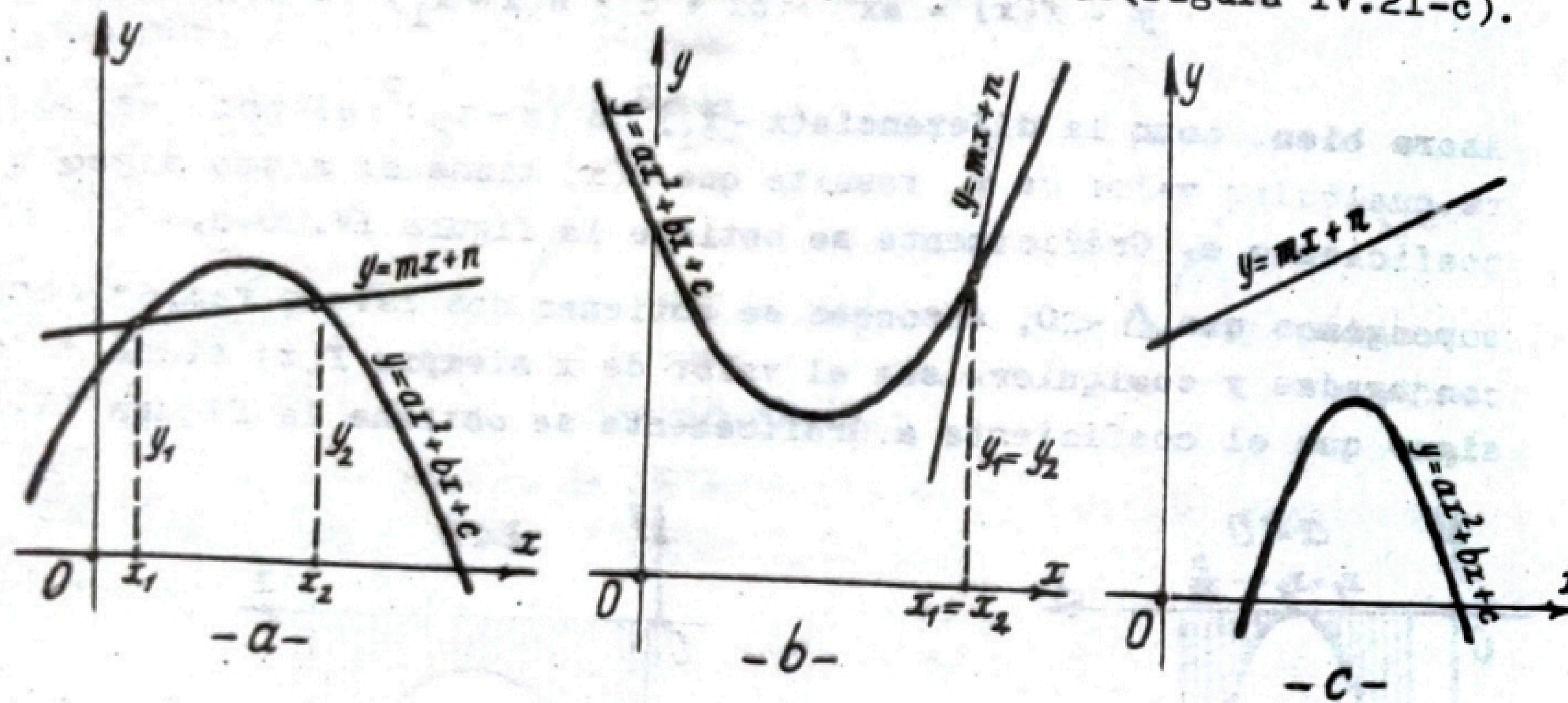
que respectivamente representan a la parábola y recta dadas (figura IV.21). Formemos el correspondiente sistema con sus ecuaciones, igualando los primeros miembros de las expresiones (1) y (2), tendremos agrupando que:

$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

ecuación cuyas raíces son:

$$x = \frac{(m - b) \pm \sqrt{(m - b)^2 - 4a(c - n)}}{2a} \qquad (3)$$

Si de la expresión (3) surgen dos raíces reales y distintas, se obtienen dos puntos de intersección (figura IV.21-a) entre la parábola y la recta dadas; si las raíces son coincidentes, resulta un solo punto común (figura IV.21-b); finalmente si las raíces son complejas conjugadas, no existe punto de intersección entre la parábola y recta dadas (figura IV.21-c).



- figura IV.21 -

EJEMPLOS: a) Determinar la intersección de la parábola, que corta al eje de abscisas en los puntos A(-7 , 0), B(1 , 0) y cuyo mínimo es igual a - 16, con la recta que pasa por los puntos M(-5 , -3), N(1 , -27).

a) Determinemos la ecuación de la parábola. Como sus raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 1$, aplicando la expresión (1) del parágrafo IV.10 resulta:

$$y = f(x) = a(x + 7)(x - 1) \qquad (4)$$

Ahora bien, como la parábola dada tiene por mínimo a - 16, su abscisa correspondiente será:

$$x_{min} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-7 + 1}{2} = -3$$

luego:

$$y_{min} = a(-3 + 7)(-3 - 1) = -16$$

$$a = 1$$

y, por lo tanto, reemplazando en la expresión (4) se obtiene:

$$y = f(x) = x^2 + 6x - 7 \qquad (5)$$

que es la ecuación de la parábola buscada.

b) Determinemos la ecuación de la recta. De acuerdo a lo dicho en el parágrafo III.6 resulta:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad \frac{y + 27}{24} = \frac{x - 1}{-6}$$

luego:

$$y = f(x) = -4x - 23 \qquad (6)$$

c) Determinemos los puntos de intersección de la parábola y recta dadas.- Formemos el sistema con las expresiones (5) y (6) e igualemos:

$$x^2 + 6x - 7 = -4x - 23$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

luego: $x_1 = -8$, $x_2 = -2$ que sustituídos por sus correspondientes en una de las ecuaciones del sistema dan $y_1 = 9$, $y_2 = -15$. Por lo tanto: la parábola y recta dadas se cortan en los puntos $P_1(-8 , 9)$ y $P_2(-2 , -15)$.-

IV.12.- Cónicas.- Las cónicas son las curvas cuya ecuación es un polinomio de segundo grado en las dos variables, x, y, igualado a cero.

En tal sentido la parábola cuadrática, como función algebraica racional entera de segundo grado (ver parágrafos IV.7 y 9), es una cónica.

De acuerdo con los posibles sistemas de ecuaciones de segundo grado en las variables x e y que se pueden formar, realicemos el estudio de las cónicas.

Imaginemos un sistema de coordenadas cartesianas. Los tipos más simples de ecuaciones de segundo grado son los que tienen un solo término, o sea:

$$y^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \quad ; \quad xy = 0$$

Mientras las dos primeras ecuaciones respectivamente se satisfacen para puntos de los ejes de abscisas y ordenadas, la tercera se satisface para valores nulos de x ó y, ubicándose su gráfica sobre los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente.

Si consideramos las posibles ecuaciones de segundo grado con dos términos, tendremos:

$$y^2 + ax^2 = 0 \quad ; \quad y^2 + axy = 0 \quad ; \quad y^2 + ay = 0$$
$$y^2 + ax = 0 \quad ; \quad y^2 + a = 0 \quad ; \quad xy + ax = 0$$
$$xy + a = 0$$

además de los que se obtienen al permutar en estos tipos la variable x con la y.

Finalmente si consideramos las posibles ecuaciones de segundo grado con tres términos tendremos una infinidad con solo alterar los términos x,y. Sin embargo, entre las que tienen tres términos, las de mayor interés, además de la ecuación general de segundo grado en un término variable (ver parágrafos IV.7 y 9), son las que contienen únicamente los términos en x^2 e y^2, y el constante; es decir las que se obtienen dividiendo por el término constante las ecuaciones del tipo:

$$mx^2 + ny^2 = 1$$

Si m y n son negativos la ecuación carece de raíces reales, pero si ambos son positivos, haciendo $a^2 = \frac{1}{m}$ y $b^2 = \frac{1}{n}$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y la representación gráfica que se obtiene es una elipse o circunferencia según que a y b, respectivamente sean distintos o iguales.

Si m y n son de signos contrarios, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

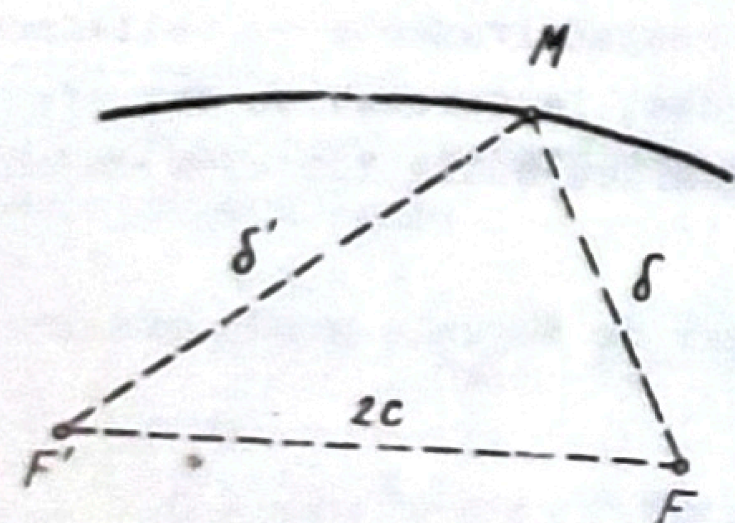
y la representación gráfica que se obtiene es una hipérbola.

La elipse, parábola e hipérbola integran las cónicas.

La hipérbola propiamente no es una función algebraica racional entera de segundo grado.

En los parágrafos siguientes estudiamos la elipse y circunferencia como funciones algebraicas racionales enteras de segundo grado.

IV.13.- <u>La elipse como función de segundo grado.-</u> Geométricamente se define la elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a dos puntos fijos, llamados focos y situados a una distancia 2c, son constantes y mayores que 2c.



- figura IV.22 -

En efecto: sean (figura IV.22) F y F' los focos y M un punto perteneciente a la elipse; siendo 2a el valor constante de la suma de distancias tendremos, por definición, que:

$$\overline{F'M} + \overline{MF} = 2a$$

y

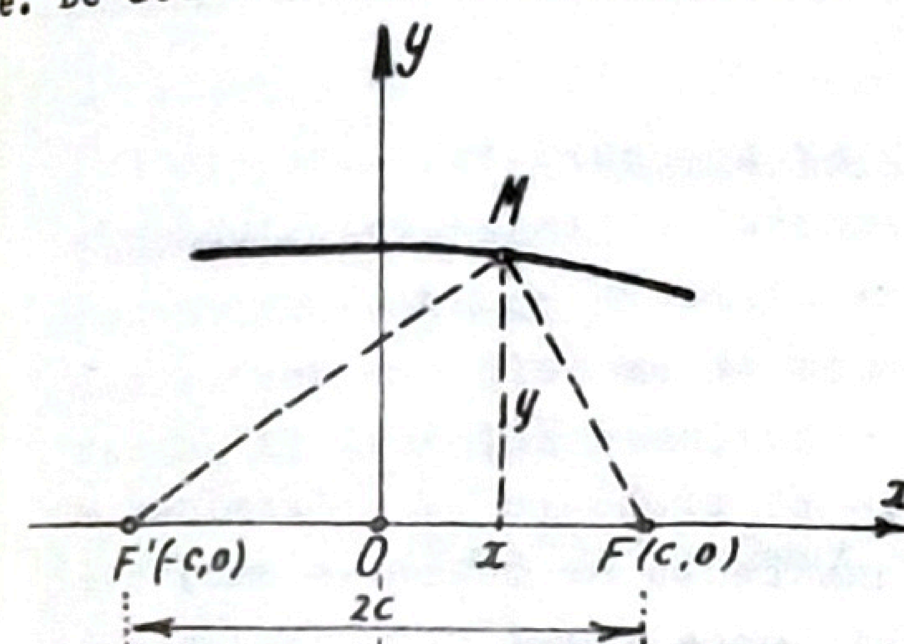
$$2a > 2c$$

o sea:

$$a > c$$

La constante c se llama semidistancia focal.

Para deducir la ecuación de la elipse consideremos como eje de abscisas el determinado por los focos F y F', y como eje de ordenadas su mediatriz (figura IV.23). Sea un punto M(x , y) genérico perteneciente a la elipse. De acuerdo con la definición:



- figura IV.23 -

$$\overline{F'M} + \overline{MF} = 2a \qquad (1)$$

pero:

$$\overline{F'M} = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$
$$\overline{MF} = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

reemplazando en (1) y operando:

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$$

elevando al cuadrado:

$$y^2 + (x+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + y^2 + (x-c)^2$$

simplificando:

$$a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} = a^2 - cx \qquad (2)$$

Elevando nuevamente al cuadrado la expresión (2), simplificando y operando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

haciendo $a^2 - c^2 = b^2$ resulta:

$$\boxed{F(x , y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0} \qquad (3)$$

que es la forma implícita de la ecuación de la elipse.

De la expresión (3) se deduce:

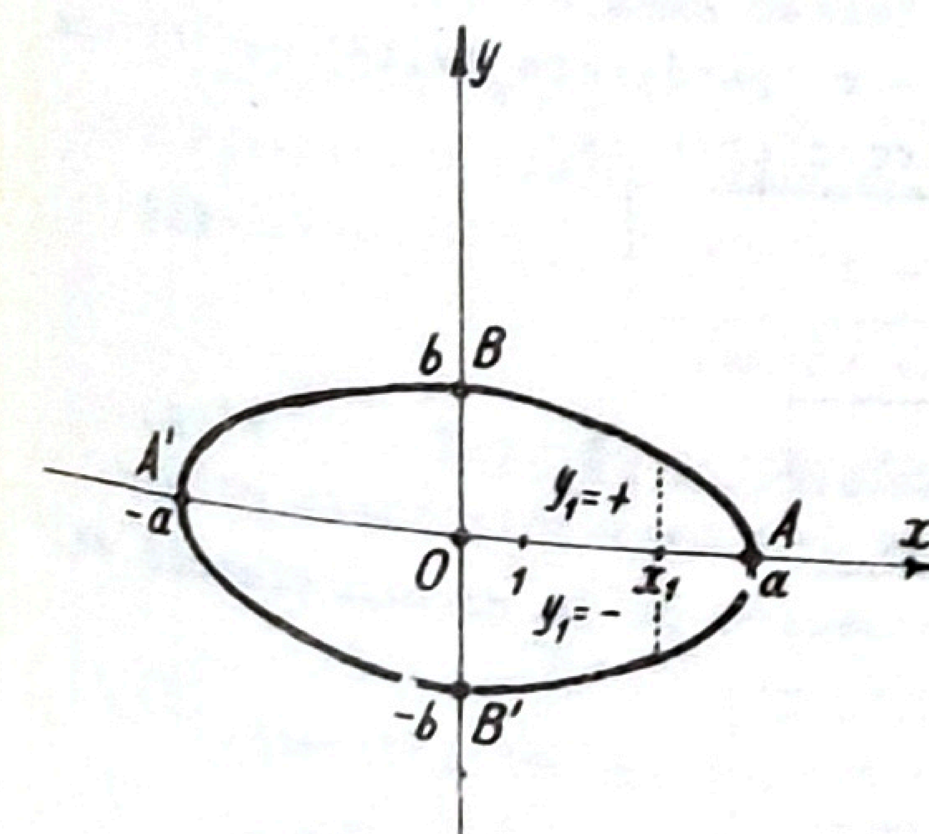
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (4)$$

la forma normal de la ecuación de la elipse.

Finalmente la forma explícita es:

$$\boxed{y = f(x) = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (5)$$

La representación gráfica de la función se aprecia en la figura IV. 24.-



- figura IV.24 -

Como la variable independiente se halla afectada del signo radical, debe cumplirse que $a^2 - x^2 \geq 0$, o sea que $-a \leq x \leq a$, y como mientras ello sucede la variable y dependiente varía entre −b y +b, el intervalo de definición se expresa por las desigualdades siguientes:

$$-a \leq x \leq a$$
$$-b \leq x \leq b$$

La relación entre la semidistancia focal y el semieje mayor a, recibe el nombre de excentricidad de la elipse y se designa con la letra k, de donde $k = \frac{c}{a}$; luego, como $c < a$ y ambos son positivos, resulta $0 \leqslant k < 1$.- La excentricidad k de la elipse expresa su achatamiento.

Si $k = 0$, resulta $c = 0$ y, por lo tanto, $a = b$ con lo que la curva es una circunferencia. A mayores valores de c, mayor distancia entre los focos con lo que el valor de k resulta cada vez más próximo a la unidad y la elipse más achatada.

IV.14.- Intersección de elipse y recta.- El problema de determinar los puntos de intersección de una elipse y una recta se resuelve mediante el empleo de un procedimiento similar al visto en el parágrafo IV.11.-

En consecuencia: deben determinarse las raíces del sistema de ecuaciones formado por la elipse y recta dadas. La ecuación resolvente es de segundo grado:

$$\left[\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right]x^2 + \frac{2mn}{b^2}\,x + \left[\frac{n^2}{b^2} - 1\right] = 0$$

siendo a, b, m, n, constantes.

Según que la ecuación resolvente proporcione dos raíces reales y distintas, dos raíces reales e iguales o dos raíces imaginarias, respectivamente la elipse y recta dadas tienen dos, uno o ningún punto común.

IV.15.- La circunferencia como función de segundo grado.- Geométricamente se define la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo O llamado centro.

La circunferencia se obtiene como caso particular de la elipse. En efecto: cuando $k = 0$ (ver parágrafo IV.13), los focos y centro de la elipse coinciden y la curva resultante es entonces una circunferencia, resultando $a = b$.

De la expresión (3) y haciendo $a = b = r$ (parágrafo IV.13) se obtiene la forma implícita de la ecuación de la circunferencia:

$$F(x\,,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

De la expresión (1) se deduce su forma normal:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \qquad (2)$$

Finalmente la forma explícita de la ecuación de la circunferencia es:

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (3)$$

El campo de definición de la función está dado por las desigualdades siguientes:

$$-r \leqslant x \leqslant r$$
$$-r \leqslant y \leqslant r$$

IV.16.- Intersección de circunferencia y recta.- Para determinar los puntos de intersección de una circunferencia y una recta, empleando un procedimiento análogo al visto en los parágrafos IV.11 y 14, deben hallarse las raíces del sistema de ecuaciones formado por la circunferencia y recta dadas. La ecuación resolvente es:

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

siendo m, n, r, constantes.

Si las raíces de la ecuación resolvente son reales y distintas, reales y coincidentes o imaginarias, respectivamente la circunferencia y recta dadas tienen dos, uno o ningún punto común.

IV.17.- Curva algebraica.- El exámen del contenido de los parágrafos III.4, IV.7 y IV.12 impone la generalización. Así, por ejemplo, para las cónicas la función general en forma implícita viene dada por la relación:

$$F(x\,,y) = ax^2 + bxy + by^2 + gx + fy + c = 0$$

Para otros tipos de curvas la generalización se presenta de manera natural y espontánea pues bastará considerar funciones implícitas de la forma:

$$F(x\,,y) = 0 \qquad (1)$$

donde $F(x\,,y)$ es un polinomio en las variables x,y de primero, segundo, tercero, ... n-simo grado. Su representación gráfica se llama curva algebraica que se define como el conjunto de puntos de un plano coordenado cuyas coordenadas cartesianas satisfacen la expresión (1).

El grado del polinomio indica el grado de la curva algebraica y así, por ejemplo, tendremos rectas, cónicas, parábolas cúbicas, parábolas cuárticas, etc.

IV.18.- Función algebraica racional entera de tercer grado.- Dada la función algebraica racional entera de tercer grado:

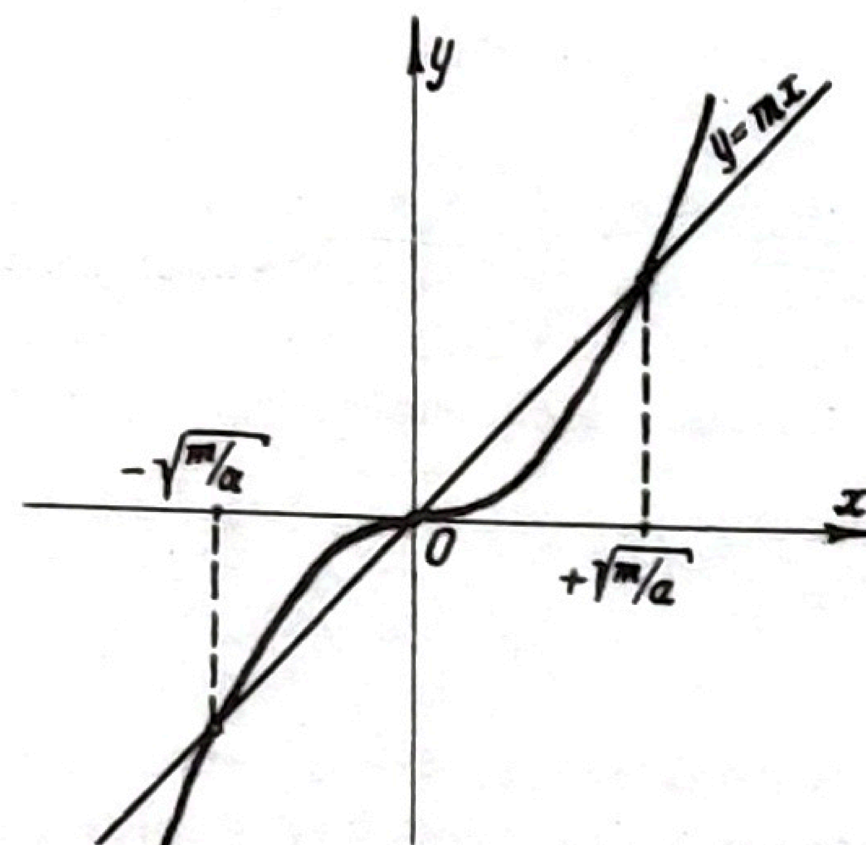
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

su representación gráfica recibe, en general, el nombre de parábola cúbica.

a) TIPO $f(x) = ax^3$, donde a es un número real. Se obtiene cuando:

$$bx^2 = cx = d = 0$$

Su intervalo de definición viene dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$, $[-\infty, \infty]$ y por representación gráfica se obtiene una parábola impar que pasa por el origen O(o , o) de coordenadas, pues, cuando $x = 0$ la función también($f(x) = 0$). Ubicada en los cuadrantes primero y tercero del sistema de referencia resulta tangente en el origen O al eje de abscisas (figura IV.25).-



- figura IV.25 -

Las intersecciones con una recta $f(x) = mx$, dan por abscisas las soluciones de la ecuación:

$$mx - ax^3 = 0 \qquad (1)$$

o sea:

$$x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \sqrt{\frac{m}{a}} \; ; \; x_3 = -\sqrt{\frac{m}{a}}$$

y entonces: si m tiene el mismo signo que a, la recta corta a la curva, además del origen, en dos puntos simétricamente colocados respecto del mismo; por el contrario: si m es de signo opuesto al de a, únicamente la recta corta a la curva en el origen como único punto real porque las dos soluciones restantes de la expresión (1) - son imaginarias.

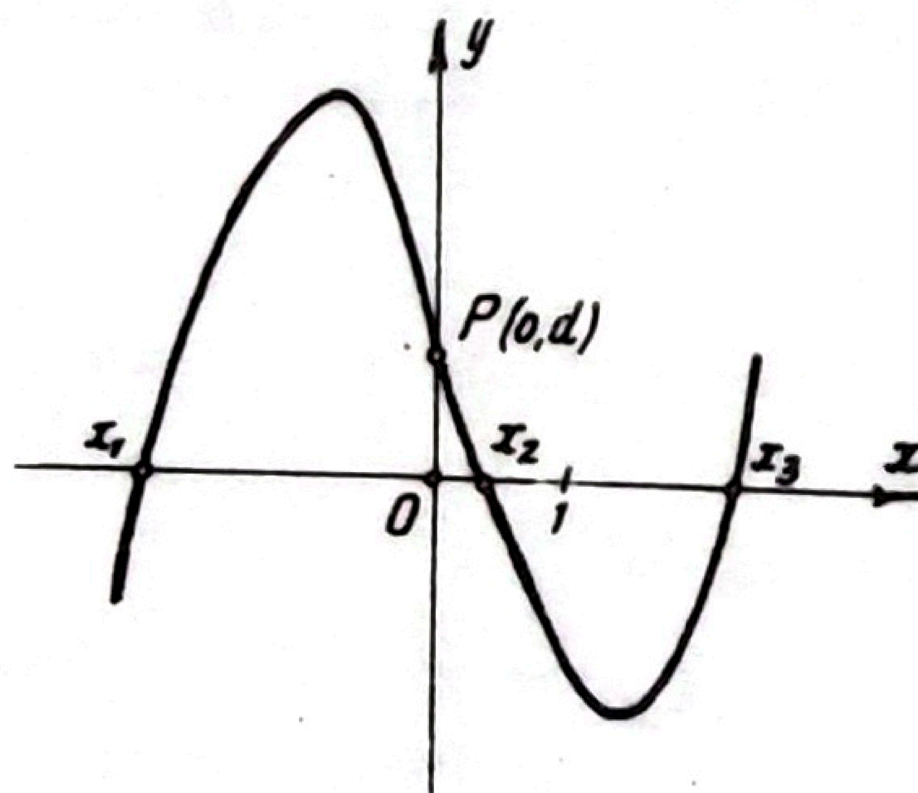
Cuando $m = 0$, la ecuación (1) se reduce a la forma $ax^3 = 0$, donde $x = 0$ es raíz triple (también resulta $y = 0$); luego: el eje de abscisas tiene con la curva tres puntos de intersección confundidos en el origen. Se obtiene una tangente de inflexión.

Cuando a y x son positivos, la función es creciente y positiva; por el contrario: cuando a es positivo y x es negativo, la función es creciente y negativa. Si a fuera negativo la curva resultaría invertida con respecto al eje de abscisas ubicándose en los cuadrantes segundo y cuarto del sistema de referencia.

b) TIPO $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (FORMA GENERAL). Su intervalo de definición viene dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$, $[-\infty, \infty]$ y la curva representativa de la función es semejante a la de la figura IV.25. En efecto: cuando la variable independiente se anula, la función vale d y, - por lo tanto, en el punto de coordenadas P(O , d) la curva corta al eje de ordenadas. Por su parte, las intersecciones con el eje de abscisas son las raíces de la ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (2)$$

donde, por lo menos, siempre figura alguna raíz real.(figura IV.26).



- figura IV.26 -

Cuando a y x son positivos, f(x) es creciente y positiva; por el contrario: cuando a y x son negativos f(x) es creciente y negativa.

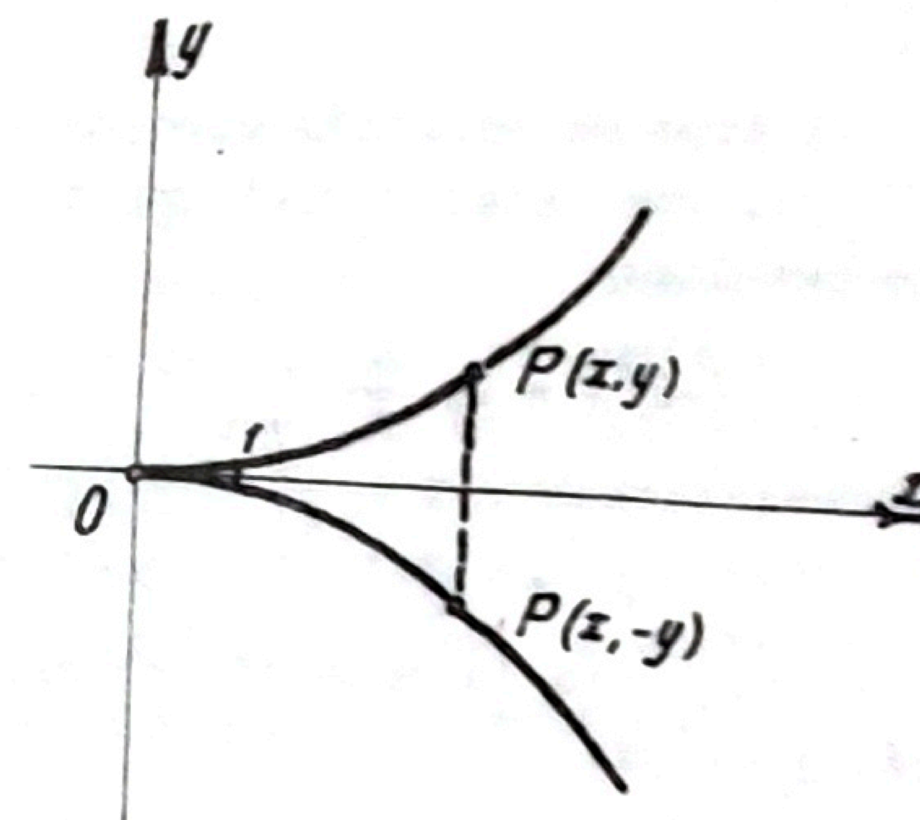
c) TIPO $f(x) = \sqrt{ax^3}$. Sea la función:

$$y^2 = f(x) = ax^3$$

que también puede escribirse:

$$y = f(x) = \sqrt{ax^3} = (ax^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$

su intervalo de definición viene dado por la relación $0 \leq x < \infty$, $(0 , \infty]$ porque a valores negativos de x, f(x) no está definida en el campo real.



- figura IV.27 -

La representación gráfica de la función se ubica en los cuadrantes primero y cuarto siendo simé - trica respecto al eje de abscisas, porque si P(x , y) es un punto de - la curva, P(x , -y) también lo es, dado que la función es par, o sea $f(x) = f(-x)$. La curva se llama parábola semicúbica (figura IV.27).

Cuando a es negativo la curva es simétrica respecto del eje de - ordenadas ubicándose en los cuadrantes II y III.-

Una recta que pase por el origen, corta a la parábola semicúbica en los puntos cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación:

$$m^2x^2 - ax^3 = 0 \qquad (3)$$

o sea $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = \frac{m^2}{a}$. La primera de las soluciones es una raíz doble lo que indica que las rectas que pasan por el origen tienen dos puntos de intersección con la curva, llamados puntos dobles, cortándola además en - un tercero x_3.

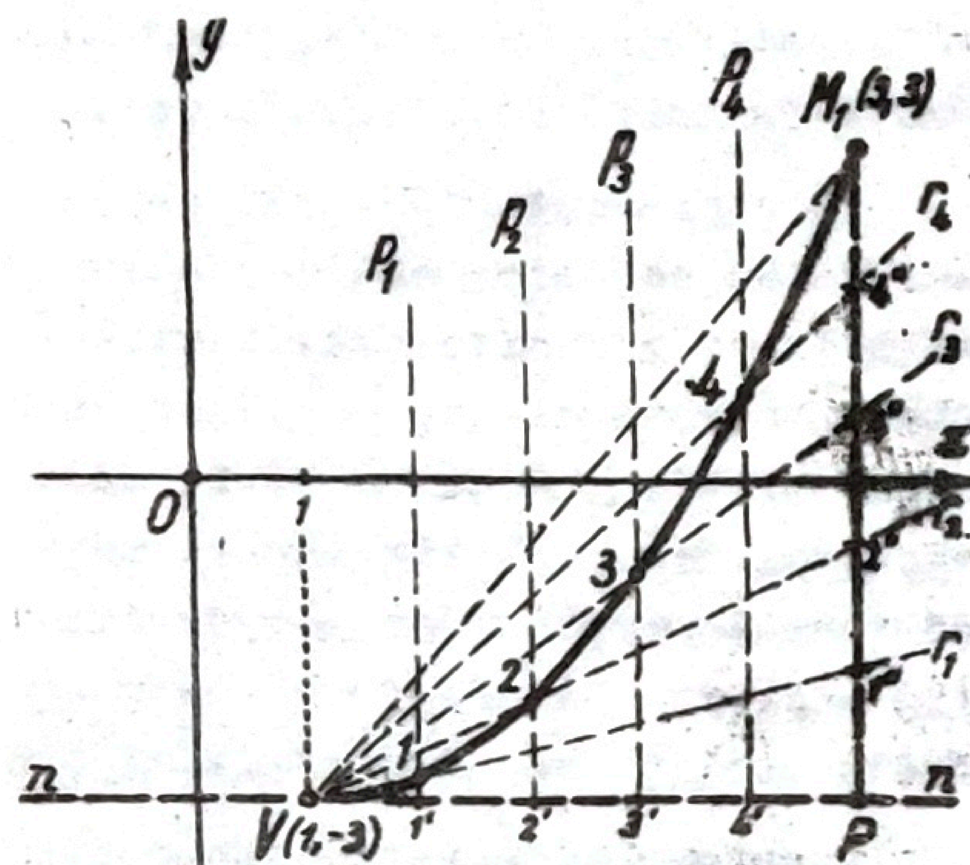
Si $m = 0$ la recta tiene tres puntos de intersección confundidos en el origen lo que indica que el eje de abscisas, al tener en el origen tres - puntos de intersección confundidos con la curva, es tangente doble.

Creciendo x, la relación ax^3 también es creciente y f(x) es positiva y creciente en su rama positiva y negativa y decreciente en su rama negativa.

IV.19.- <u>Ejercicios y problemas.-</u> a) Construir la parábola de eje vertical de vértice V(1 , -3) y que pasa por el punto $M_1(3 , 3)$.

Conocido el vértice V(1 , -3), eje y un punto $M_1(3 , 3)$ de la parábola la construcción geométrica es la siguiente (figura IV.28):

1. Se traza la perpendicular al eje por el vértice V;
2. Se traza M_1P perpendicular a la anterior n;
3. Se dividen en igual número de partes iguales los segmentos VP y PM_1;
4. Por los puntos de división (1', 2', 3', 4') del segmento VP se trazan paralelas al eje de la parábola (p_1, p_2, p_3, p_4);
5. Se trazan los rayos (r_1, r_2, r_3, r_4) que con origen en V pasan por los puntos de división del segmento PM_1(1", 2", 3", 4");
6. La intersección de cada paralela (p_1, p_2, p_3, p_4) con su correspondiente rayo (r_1, r_2, r_3, r_4) es un punto de la parábola (1 , 2 , 3 , 4).



- figura IV.28 -

b) Determinar la ecuación y elementos de la parábola de vértice 0 y eje Ox que pasa por el punto $M_1(4/3, -2)$.

El tipo de ecuación buscada es $y^2 = 2px$. Por pasar por el punto M dado resulta:

$$(-2^2) = 2p\,\frac{4}{3}$$

luego:

$$p = \frac{3}{2}$$

y, por lo tanto la ecuación normal será: $y^2 = 3x$.

Los elementos de dicha parábola son: parámetro $p = \frac{3}{2}$, foco $F(\frac{3}{4}, 0)$, ecuación de la directriz: $x = -\frac{3}{4}$

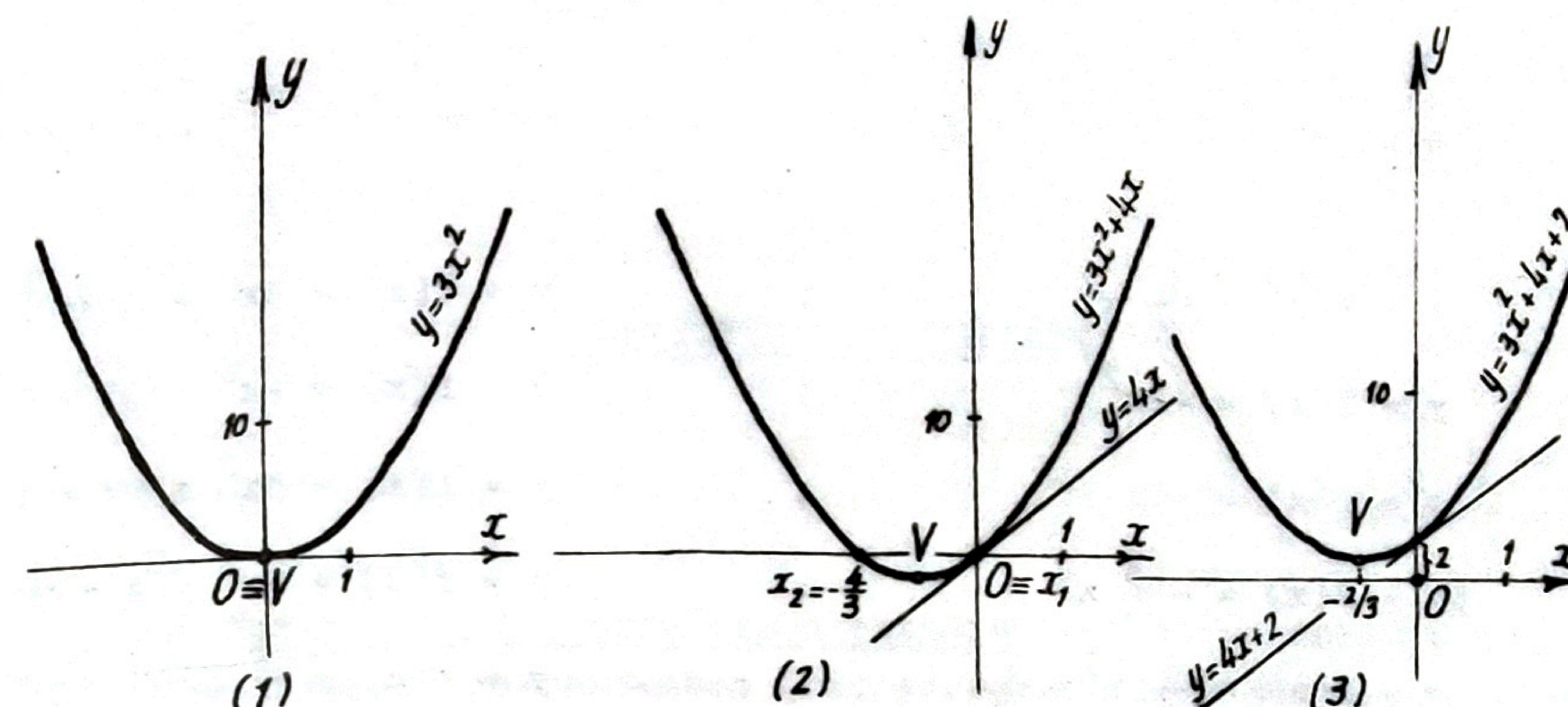
c) Representar gráficamente las siguientes funciones:

1. $y = f(x) = 3x^2$
2. $y = f(x) = 3x^2 + 4x$
3. $y = f(x) = 3x^2 + 4x + 2$

La función $f(x) = 3x^2$ tiene por representación gráfica una parábola de eje vertical; en consecuencia sus ramas se ubican en los cuadrantes primero y segundo, porque a = 3 0, y sus elementos son: parámetro $p = \frac{1}{6}$, foco $F(0, \frac{1}{12})$, ecuación de la directriz $y = -\frac{1}{12}$, vértice V(o , o). Su representación gráfica se aprecia en la figura IV.29.-

La función $f(x) = 3x^2 + 4x$ tiene por representación gráfica una curva semejante a la anterior, y sus elementos son: parámetro $p = \frac{1}{6}$, foco F $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$, ecuación de la directriz $y = -\frac{17}{12}$, vértice $V(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$, puntos de intersección con eje de abscisas $x_1 = 0(o, o)$ y $x_2(-\frac{4}{3}, 0)$. Su representación gráfica se aprecia en la figura IV.29.-

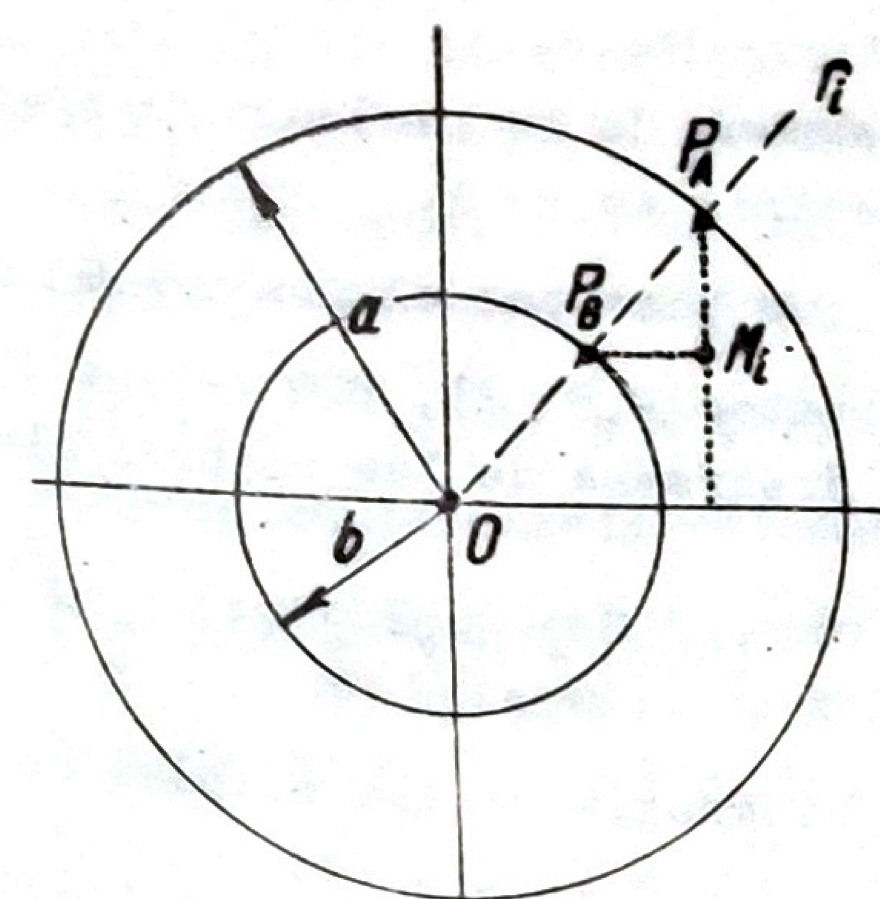
La función $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ tiene por representación gráfica una curva semejante a las anteriores y sus elementos son: parámetro $p = \frac{1}{6}$, foco $F(-\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, ecuación de la directriz $y = \frac{7}{12}$, vértice $V(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, puntos de intersección con el eje de abscisas, imaginarios. Su representación gráfica se aprecia en la figura IV.29.-

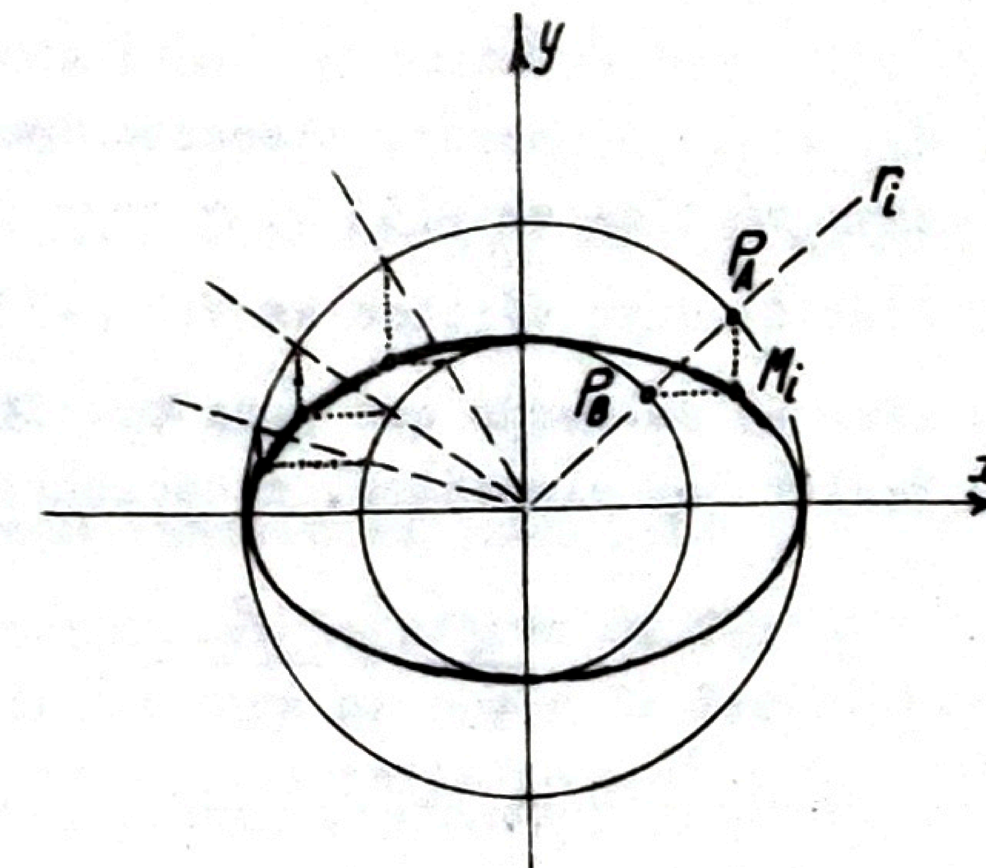


- figura IV.29 -

d) Construir la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. En este caso tendremos: a = 5; b = 3 y $c = \sqrt{25 - 9} = 4$. Conocidos los valores de a, b, c se procede de la siguiente forma:

1. se trazan las circunferencias de radios a y b;
2. cada rayo r_i de origen O corta a las circunferencias trazadas en dos puntos P_A y P_B, respectivamente (figura IV.30-a);
3. Por P_A se traza una normal al semieje mayor y una paralela al mismo por P_B, las que se cortan en M_i que es un punto de la elipse. Repitiendo el procedimiento se obtiene la figura IV.30-b.-





- a -   - b -

- figura IV.30 -

EJERCICIOS: a) Construir las parábolas conocidos los siguientes elementos:

eje vertical	M(-3 , 2)	V(0 , -2)
eje horizontal	M(0 , 2)	V(3 , 0)
eje horizontal	M(1 , 6)	V(-3 , 1)
eje vertical	M(-2 , 1)	V(-4 , -2)

y calcular el parámetro p, foco F, ecuación de la directriz y función correspondiente.

b) Representar gráficamente y calcular los elementos de las siguientes parábolas:

$y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$; $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$y = f(x) = -2x^2$; $y = f(x) = -x^2 + x + 3$

$y^2 = f(x) = -4x$; $y = f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

$5y = f(x) = -\frac{3}{4}x^2$; $y = f(x) = 4x^2 + x - \frac{1}{2}$

$y = f(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{5}$; $y = f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{6}x$

$y = f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{27}$; $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - 14$

c) Hallar la intersección de la parábola de eje horizontal cuyo vértice coincide con el origen y que pasa por el punto A(3 , 3) con la recta dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = f(t) = 2 + \frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y = g(t) = 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$$

R: $P_1(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}), P_2(3, 3)$

d) Hallar la ecuación, elementos y diagrama de la parábola de eje vertical cuyo vértice es V(3 , 2) y cuya directriz es y = 1.

e) Idem d) cuyo vértice es V(2 , -1) y que pasa por el punto A(6 , 2).

f) Idem d) sabiendo que pasa por los puntos A(3 , 2), B(0 , -4) y C(-5 , 26).

h) Hallar los elementos, ecuaciones y diagramas de las elipses siguientes:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad ; \quad 169x^2 + 25y^2 - 4225 = 0$$

i) Elementos, restantes, ecuaciones y diagramas de las elipses siguientes:

$a = 10$; $b = 6$ focos sobre eje ordenadas

$a = 7$; $k = \frac{\sqrt{13}}{7}$ focos sobre eje de abscisas

j) Hallar la intersección de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ con la recta de ecuación $\frac{x}{9/2} + \frac{y}{3} = 1$

k) Idem j) siendo la ecuación de la elipse $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$ y pasando la recta por el punto $M(\frac{7}{2}, \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3})$ y perpendicular a la recta de ecuación $\sqrt{2}\,x + 2y - 4 - 5\sqrt{2} = 0$

CAPITULO V

FUNCIONES TRASCENDENTES

V.1.- **Naturaleza del problema a estudiar**.- Las funciones que no son algebraicas se llaman trascendentes (ver parágrafo I.5) porque, precisamente, trascienden del campo del Algebra.-

El presente capítulo tiene por objeto el estudio de las principales funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, etc.), cuyo campo de aplicación es muy vasto en los problemas que deben resolver la ciencia y la técnica.-

V.2.- **Función exponencial: tipo: $f(x) = a^x$**.- Recibe el nombre de función exponencial la expresión del tipo:

$$y = f(x) = a^x \qquad (1)$$

donde la variable independiente figura como exponente de una constante a, no nula y positiva ($a > 0$) llamada base.-

Cuando la constante es igual a la unidad ($a = 1$), la expresión (1) se transforma, y entonces resulta:

$$y = f(x) = a^x = 1^x = 1$$

por lo tanto no la consideraremos como función exponencial.-

En definitiva: será función exponencial la expresión $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Su intervalo de definición está dado por la desigualdad siguiente: $-\infty < x < \infty$ $[-\infty, \infty]$ y, por lo tanto, es infinito.-

Las funciones $f(3) = a^3$; $f\,\frac{3}{2} = a^{3/2}$; $f(-3) = a^{-3}$ son ejemplos de funciones exponenciales.-

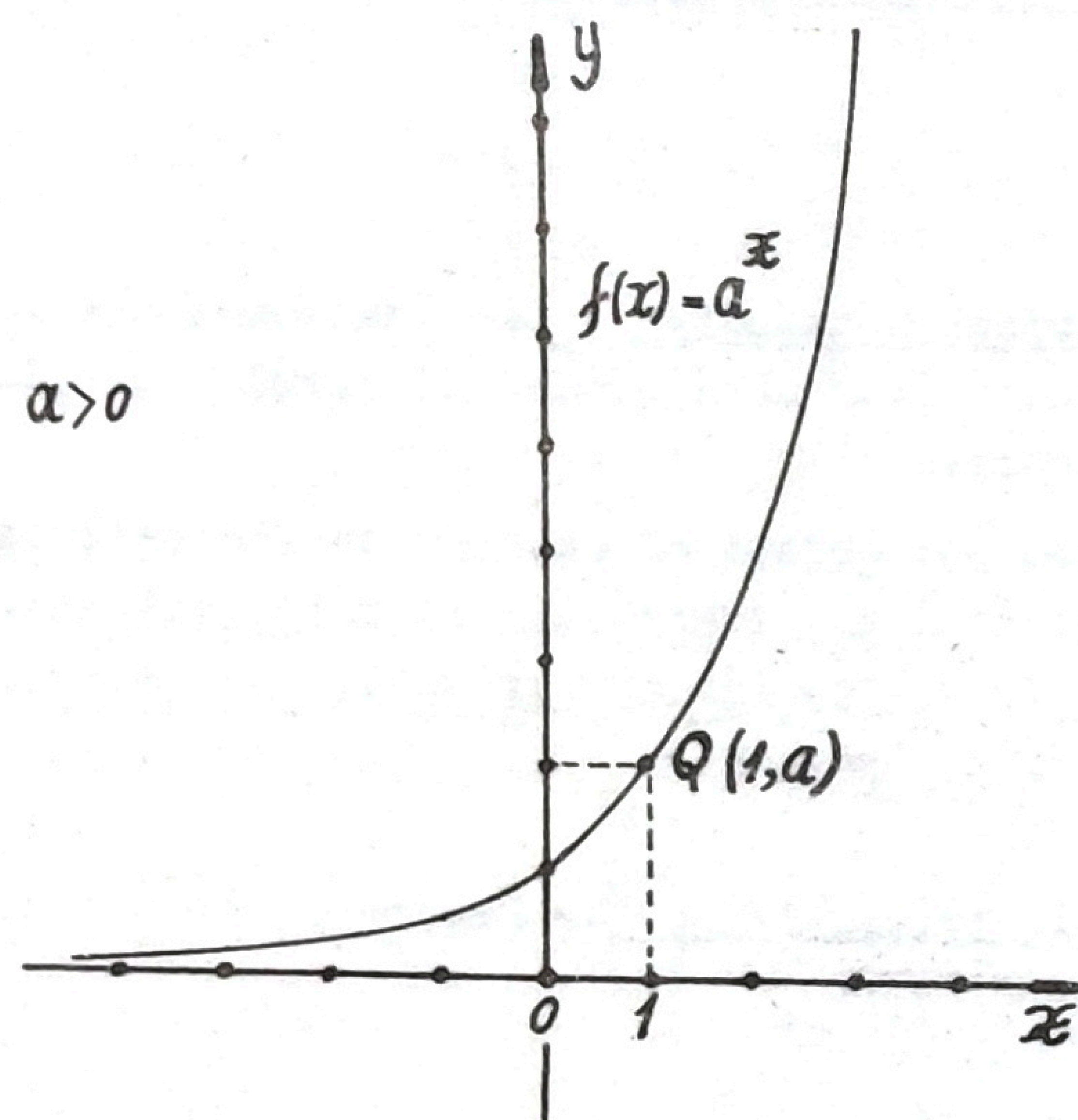
Cualquiera sea el valor que se asigne a la variable independiente x,- la función resulta siempre positiva; en consecuencia su gráfica (figura V.1) pertenece a los cuadrantes primero y segundo, o sea que: para todo x es $f(x) = a^x > 0$, lo que indica que la función exponencial no se anula nunca.-

Si $x = 0$, la función toma el valor $f(x) = a^0 = 1$, y por lo tanto su gráfica (figura V.1) siempre corta al eje de ordenadas en el punto P(0 , 1).-

Si $x = 1$, la función toma el valor $f(x) = a^1 = a$, y por lo tanto su gráfica (figura V.1) siempre pasa por el punto Q(1 , a).-

De acuerdo al valor de la constante a que oficia de base se obtiene la orientación de su diagrama representativo:

1. Si a $(a>1)$ es mayor que la unidad, $f(x)$ que es positiva, crece a valores positivos crecientes de su variable independiente x $(x>0)$. La curva representativa de la función crece indefinidamente y sus puntos pertenecen al primer cuadrante (figura V.1).-



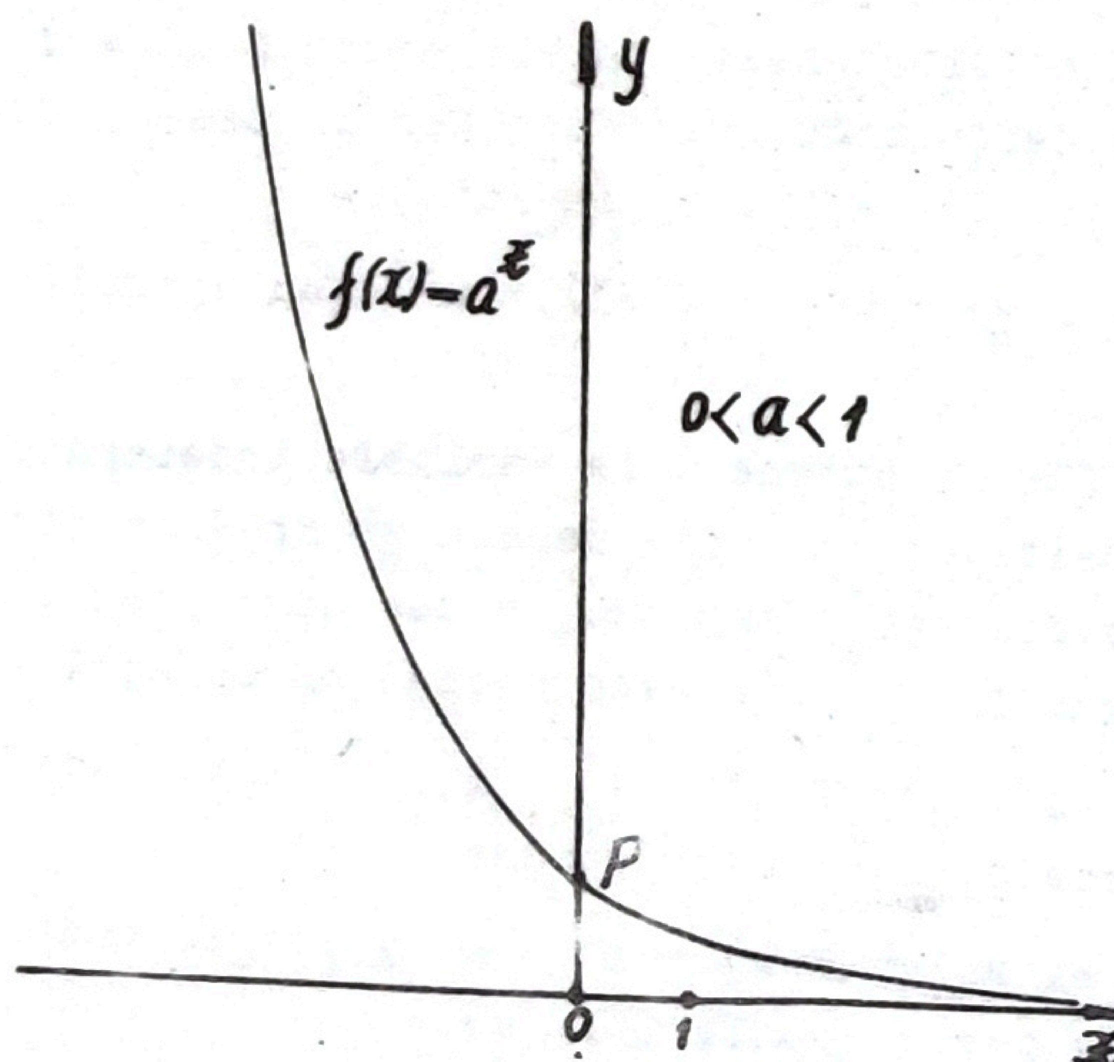
- figura V.1 -

Contrariamente, si la variable independiente x toma valores negativos decrecientes $(x<0)$, $f(x)$ que es positiva decrece, y su representación gráfica, cuyos puntos pertenecen al segundo cuadrante, es asíntota del eje de abscisas, por tender a cero los valores de la función (figura V.1).-

2. Si a $(0<a<1)$ es positiva pero menor que la unidad, la representación gráfica de la función exponencial (figura V.2), es simétrica con respecto al eje de ordenadas de la obtenida en la figura V.1, porque:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

Se observa además que, mientras por la gráfica de la figura V.1 la función exponencial es creciente, pues a medida que aumenta x también lo hace f(x); por la representación de la figura V.2 la función exponencial es decreciente, dado que disminuye f(x) cuando aumenta x.-



- figura V.2

Los valores negativos de la base a de la función exponencial están deliberadamente excluídos porque, en tal caso, no están definidos los valores correspondientes a $x = \frac{p}{q}$, cuando p es par, en el campo de los números reales.-

Una de las bases utilizadas frecuentemente en la función exponencial es el número $e = 2{,}718$, introduciéndose, por consiguiente, la notación $y = f(x) = e^x$ para expresar la función exponencial en esa base.-

Un tipo particular de función exponencial, de frecuente aplicación en el CALCULO DE PROBABILIDADES y en la TEORIA DE ERRORES, está dado por la expresión:

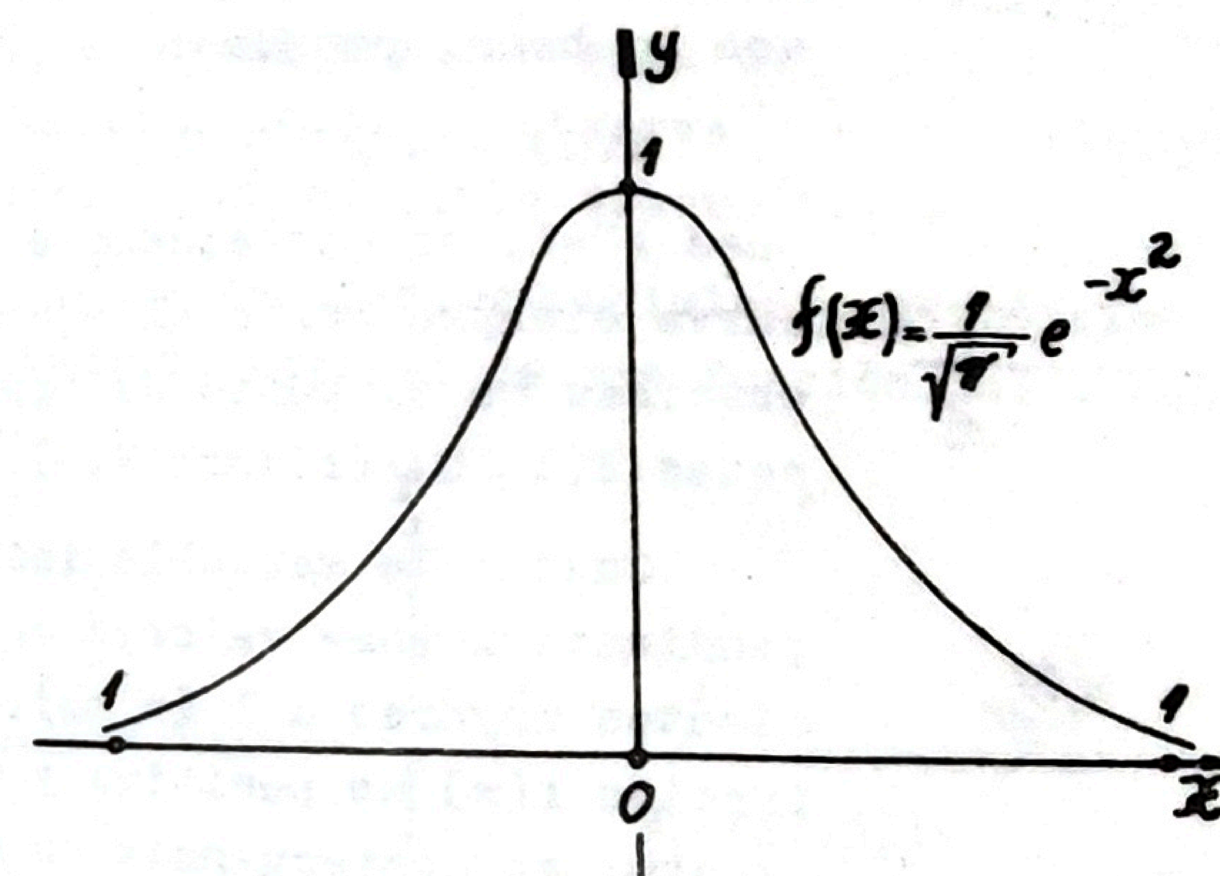
$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

atribuída a GAUSS. Siendo $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ un factor constante, con solo considerar la expresión:

$$g(x) = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

es posible conocer el comportamiento general de la función dada. Su intervalo de definición está dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$ $[-\infty, \infty]$, resultando infinito y abierto; se trata de una función par, o sea que $f(x) = f(-x)$, y como el exponente siempre es negativo, resulta $f(x) < 1$, y solo $f(x) = 1$ para un valor nulo de la variable independiente $(x = 0)$, pues es entonces cuando la expresión $g(x)$, y por lo tanto $f(x)$, se transforma quedando así:

$$g(x) = e^0 = 1$$



- figura V.3 -

Cuando la variable independiente x toma valores positivos crecientes $(x>0)$, la expresión $g(x)$ decrece y, en consecuencia, $f(x)$ también, pues, a medida que aumenta el exponente la exponencial negativa disminuye; análogamente, cuando la variable independiente x toma valores negativos decrecientes $(x<0)$, la expresión $g(x)$ decrece haciéndolo también, por consiguiente, $f(x)$.(figura V.3).-

Con una tabla de valores de la expresión e^{-x} fácilmente puede trazarse el diagrama de este tipo particular de función exponencial que, por su forma, habitualmente se conoce con el nombre de "curva de campana" (figura V.3).-

EJERCICIOS: a) Representar gráficamente en el intervalo $(-4, 4)$ las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = a^{-x}$ para los siguientes valores de su base a:

$1 ; 2 ; \frac{1}{2}$; $1 ; 3 ; \frac{1}{3}$; $1 ; 4 ; \frac{1}{4}$

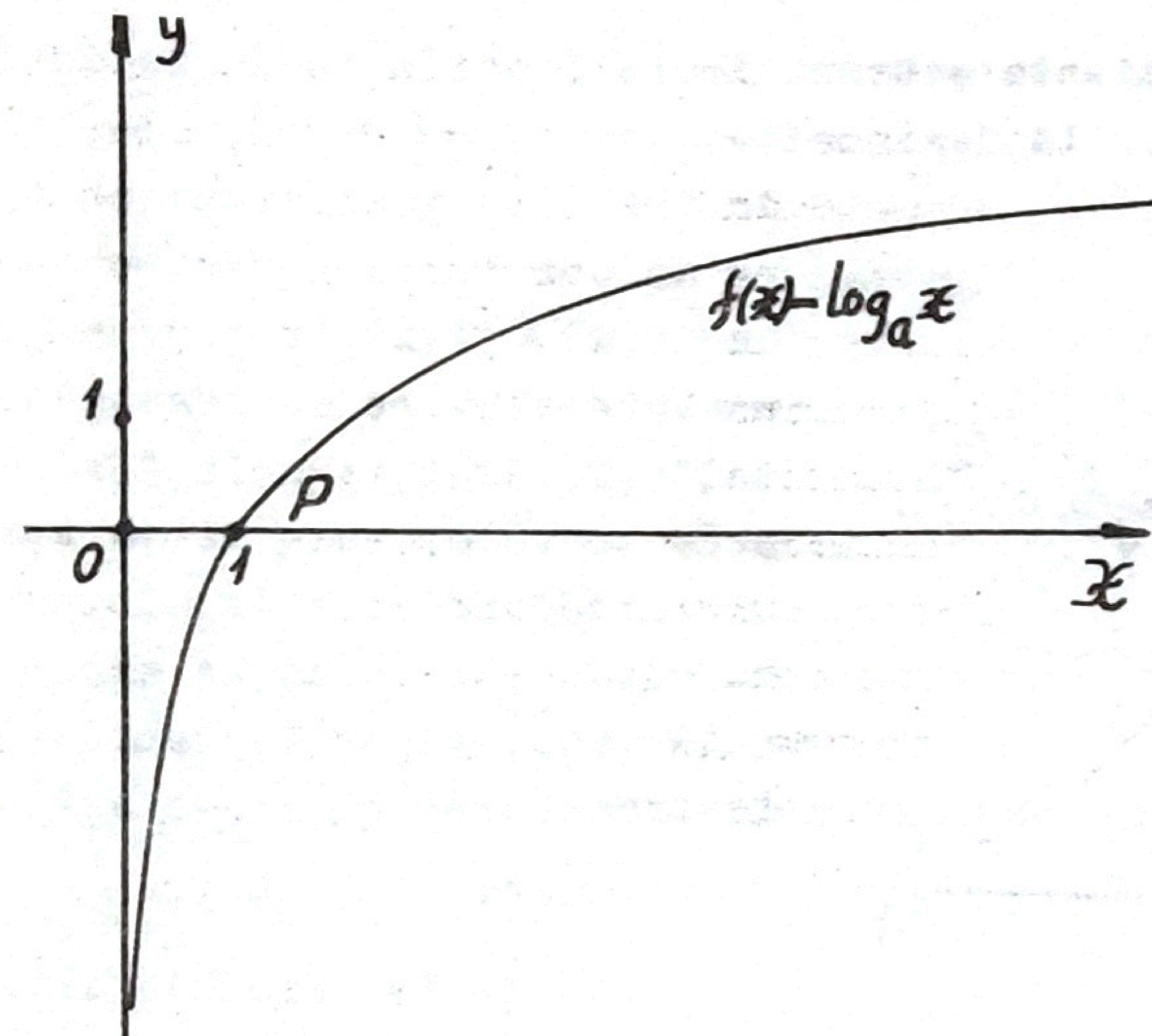
$1 ; 5 ; \frac{1}{5}$; $1 ; 6 ; \frac{1}{6}$; $1 ; 7 ; \frac{1}{7}$

V. 3.- Función logarítmica: tipo: $f(x) = \log_a x$.- Llámase función logarítmica la expresión:

$$y = f(x) = \log_a x$$

donde la base a es positiva pero distinta de la unidad ($a > 0$; $a \neq 1$) y cuyo intervalo de definición, finito y abierto a la derecha, está dado por la desigualdad $0 < x < \infty$ $(0, \infty]$.-

Estudiemos la variación y diagrama de la función dada. Teniendo en cuenta su campo de variabilidad no existen puntos del diagrama sobre el eje de ordenadas ni en el segundo o tercer cuadrantes; por lo tanto, su representación gráfica se ubica en el primer y cuarto cuadrantes (figura V.4).-



- figura V.4 -

Cuando la variable independiente x se anula (x=0), la función f(x) vale 1 cualquiera sea su base, porque:

$$f(0) = \log_a 0 = 1$$

pues $a^0 = 1$; en consecuencia la curva siempre corta al eje de abscisas en el punto de coordenadas P(1 , 0) (figura V.4).-

Cuando la variable independiente x toma valores crecientes mayores a 1 ($x > 1$), la función f(x) es positiva y creciente; en consecuencia su representación gráfica (figura V.4), cuyos puntos pertenecen al primer cuadrante, se aleja de los ejes coordenados.-

Finalmente, cuando la variable independiente x toma valores positivos decrecientes menores a 1 ($0 < x < 1$), la función f(x) es negativa y decreciente; en consecuencia su representación gráfica (figura V.4), cuyos puntos pertenecen al cuarto cuadrante, resulta asintótica del semieje negativo de ordenadas, porque si $0 < x < 1$, resulta $f(x) = \log_a x > 0$, al ser entonces negativas las características de $\log_a x$.-

El trazado de pocos puntos permite, de acuerdo a lo dicho, obtener una satisfactoria aproximación en el diagrama (figura V.4).-

Una importante propiedad, basada en la noción de funciones inversas (ver parágrafo I.5), permite mediante un sencillo procedimiento geométrico construir el diagrama de la función exponencial en base a la logarítmica y viceversa, siempre que concurran determinadas condiciones, a saber: que las bases de dichas funciones sean iguales.-

Las funciones exponencial y logarítmica son inversas. En efecto: sean las funciones:

$$y = f(x) = a^x \qquad (1)$$

$$y = g(x) = \log_a x \qquad (2)$$

si en la expresión (1) se toman logaritmos en base a, resulta:

$$\log_a y = f(x) = x \cdot \log_a a$$

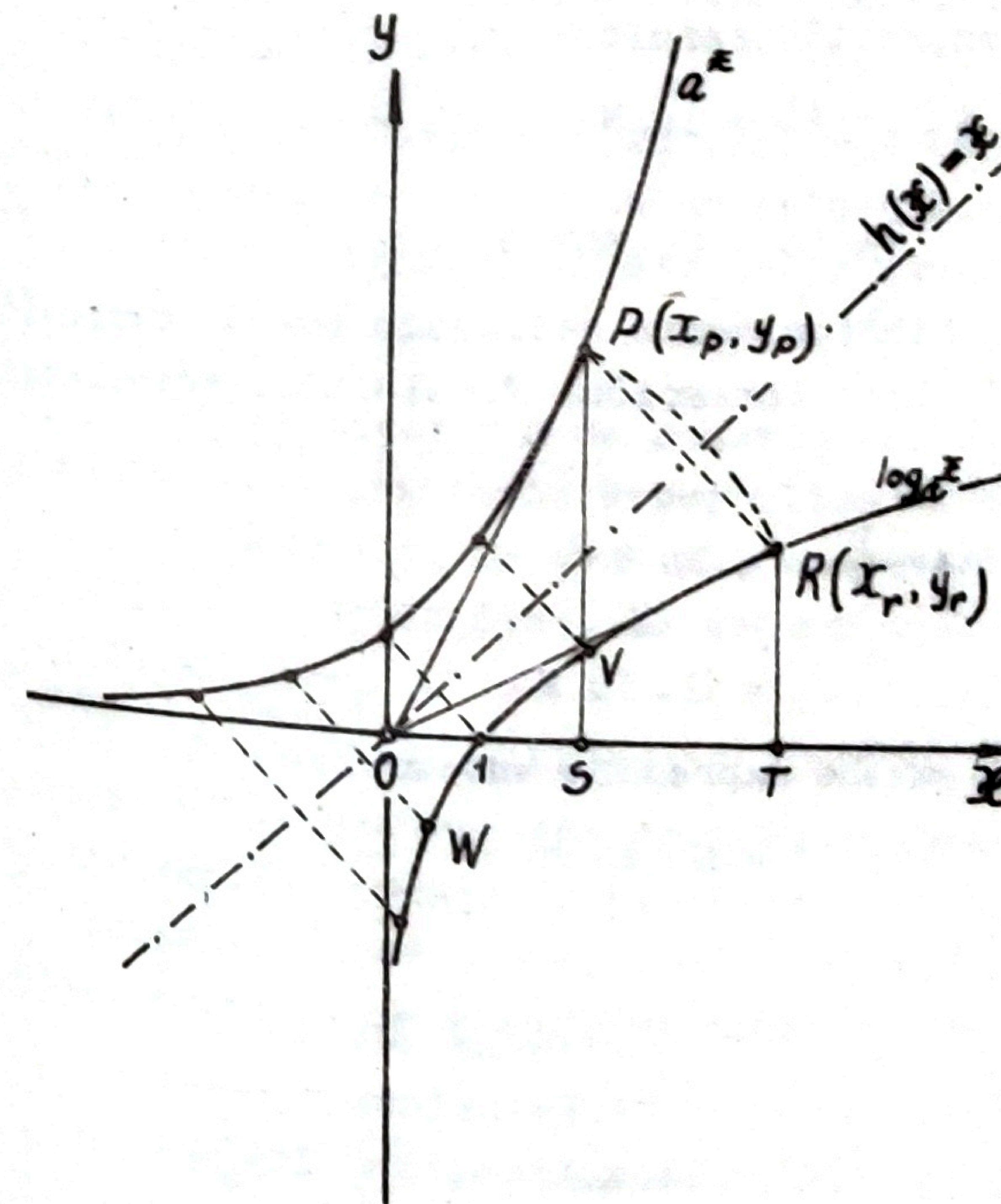
pero como: $\log_a a = 1$, se obtiene reemplazando en la anterior:

$$\log_a y = x \qquad (3)$$

función inversa de la expresada en (2) dado que con solo intercambiar las variables en (3) resulta aquélla.-

Gráficamente la noción de funciones inversas indica que las curvas representativas son idénticas pero se hallan dispuestas en distintos cuadrantes, es decir que los ejes del sistema de referencia se hallan permutados. En nuestro caso, se observa que bastaría rotar 90° la figura V.4 para obtener el diagrama de la figura V.1.-

Un ingenioso procedimiento geométrico permite construir gráficamente la función inversa de una función dada, conocida esta última. Para ello bastará hacer una transformación que permute las coordenadas entre sí de dos puntos simétricos, con respecto al origen del sistema de referencia de ambas funciones, con lo que, dado un punto $P(x_1, y_1)$, su simétrico $R(x_2, y_2)$, respecto del origen 0 y de la recta $f(x)=x$, será un punto de la función inversa buscada.-



- figura V.5 -

En efecto: sea (figura V.5) la curva p representativa de la función exponencial f(x) = a^x; hallaremos por puntos la función $g(x) = \log_a x$ inversa de la dada. Trácese la función $h(x) = x$ y determínese el simétrico $R(x_r, y_r)$, respecto de 0 y h(x), de un punto $P(x_p, y_p)$ de P.-

Los triángulos OPS y ORT, rectángulos e iguales por ser iguales sus hipotenusas (OP = OR) al equidistar del pié de la perpendicular y por ser también iguales sus ángulos ($\alpha = \alpha_1$), determinan que:

$$x_p = OS = RT = y_r$$
$$y_p = SP = OT = x_r$$

lo que indica que se hallan permutadas las abscisas y ordenadas de los puntos P dado y R hallado; en consecuencia, R es un punto de la función $g(x) = \log_a x$ inversa buscada.-

Análogamente se determinan los puntos V, W, ... (figura V.5) que unidos todos entre sí permiten obtener la curva r correspondiente a la función $g(x) = \log_a x$ inversa de la dada.-

En la práctica los logaritmos más empleados son los decimales (base 10), simbolizados por la expresión $\log x = y$, que supone $10^y = x$, y que permiten determinar por fáciles reglas el valor de su característica, en tanto que su mantisa se encuentra tabulada en numerosas tablas de los más usados y variados tipos.-

Teóricamente la base más usada es el número e, origen de los logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos, simbolizados por la notación $\ln x = y$ que supone $e^y = x$.-

La conversión de logaritmos neperianos a decimales y viceversa es sencilla. Si $\log N = a$ resulta $10^a = N$; luego, tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de esta última expresión resulta:

$$a \cdot \ln 10 = \ln N \qquad (4)$$

y por lo tanto:

$$\ln 10 = 2,30258$$

que es el factor de conversión, habitualmente designado por la expresión $\frac{1}{M}$ donde $M = 0,43429...$ es módulo de transformación. Finalmente, reemplazando en la expresión (4):

$$a : \frac{1}{M} = \ln N$$

o sea:

$$a = M \cdot \ln N$$

pero como $a = \log N$, reemplazando en la expresión anterior:

$$\log N = M \cdot \ln N$$

que es fórmula de transformación.-

EJERCICIOS: a) Representar en un mismo gráfico y en el intervalo (0, 100) las siguientes funciones:

$$f(x) = \log x \quad ; \quad g(x) = \ln x \quad ; \quad \log_m x$$

para los valores siguientes de m:

1.- 2 ; $\frac{1}{8}$; 2.- 4 ; $\frac{1}{2}$; 3.- 5 ; $\frac{1}{6}$

4.- 4 ; $\frac{1}{2}$; 5.- 6 ; $\frac{1}{4}$; 6.- 8 ; $\frac{1}{3}$

Se recomienda el empleo de distintas escalas de abscisas y ordenadas, elegidas convenientemente.-

b) Representar gráficamente las siguientes funciones en los intervalos indicados:

1.- $f(x) = \log (x^2 - 10x + 16)$ $(-3, 10)$
2.- $f(x) = \log (x^2 + 4x - 5)$ $(-10, 6)$
3.- $f(x) = \log (x^2 + 2x + 1)$ $(-7, 7)$
4.- $f(x) = \log (3 + 2x - x^2)$ $(-4, 6)$
5.- $f(x) = \log (4x^2 - 20x + 25)$ $(-5, 8)$
6.- $f(x) = \log (75 - 10x - x^2)$ $(-18, 8)$

c) Idem b):

1.- $f(x) = \ln (4x^2 - 16x + 17)$ $(-6, 6)$
2.- $f(x) = \ln (8x - x^2 - 17)$ $(-2, 10)$
3.- $f(x) = \ln (\frac{4}{3}x - 1 - x^2)$ $(-5, 6)$
4.- $f(x) = \ln (-x^2 - 4x - \frac{40}{9})$ $(-8, 4)$

V.4.- Gráficos logarítmicos.- Una escala es todo sistema de puntos acotados (numerados), construído de acuerdo con una cierta ley sobre una línea cualquiera. Se obtiene señalando sobre una línea, recta o curva, números llamados cotas, de acuerdo a una cierta calibración.-

Ejemplo: el tubo graduado de un termómetro es una escala; el cuadrante de un reloj es otra.-

Sea una función $f(x)$ uniforme en el intervalo (a, b) y una recta r sobre la cual, a partir de un origen O, se toman segmentos E proporcionales a los valores de $f(x)$ en ese intervalo:

$$E = m[f(x)]$$

Si se marcan con un pequeño trazo, normal a r, los extremos de los segmentos E, escribiendo sobre ellos el correspondiente valor numérico de x (cota), se obtiene, en general, una escala funcional y, en este caso, la escala de la función $f(x)$. El factor m de proporcionalidad es el módulo de la escala.-

En general se marcan con trazos únicamente los puntos de la escala que corresponden a valores de x en progresión aritmética (escala normal), acotándose los trazos de trecho en trecho y facilitando la lectura de los demás puntos mediante trazos de diferente longitud.-

Si las variaciones de la cota sobre la escala se representan con la letra E y las variaciones de la magnitud que se quiere representar se designan con x, la ecuación de la escala es:

$$E = f(x)$$

expresión que indica la univalencia entre la cota y la magnitud o punto que se indica sobre la línea, recta o curva, elegida.-

Si es $f(x) = mx$, la escala se llama uniforme, pues a valores equidistantes de x corresponden valores equidistantes de E.-

El incremento constante h de x se denomina escalón e intervalo la distancia i entre dos trazos consecutivos. Con excepción de la escala de la función lineal todas las demás escalas normales tienen intervalos desiguales que varían con continuidad, excepto en los puntos, por hacerse i demasiado pequeño es necesario modificar h.-

El escalón h mide la aproximación que se obtiene con la escala. Esta aproximación puede afinarse mediante la interpolación visual que generalmente permite apreciar h/5, siempre que i sea mayor o igual a 1 mm.-

Si L es la longitud total de la escala de f(x) entre las cotas a y b de la variable:

$$L = m\left[f(b) - f(a)\right] \qquad (1)$$
$$i = m\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

expresiones que permiten calcular todos los elementos necesarios para la construcción de escalas funcionales.-

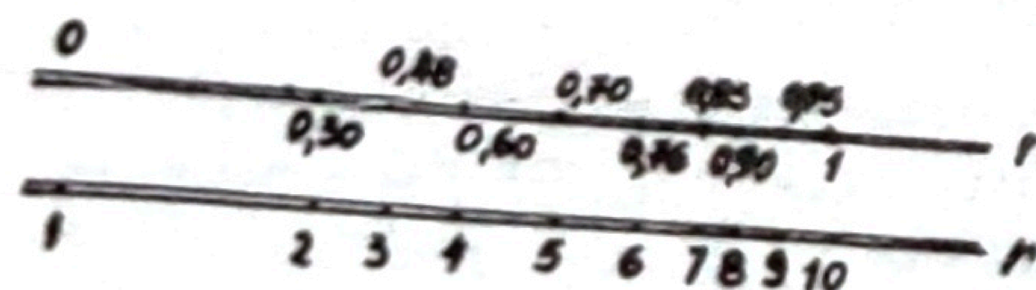
De las escalas de funciones simples (potenciales, logarítmicas, exponenciales, etc.) las de empleo frecuente son: la escala métrica $f(x) = x$ y la escala logarítmica $f(x) = \log x$.-

También suelen utilizarse escalas diferentes para medir variaciones de una misma magnitud, sea porque interese cambiar la unidad de medida, o el origen, o la unidad y el origen. Ejemplo: al medir las variaciones de temperatura, es útil usar la escala CELSIUS-FARENHEIT. Como los puntos fijos del termómetro que corresponden a 0^o y 100^o Celsius son equivalentes a 32^F y 212^F respectivamente, siendo uniformes las dos escalas debe ser:

$$F = \frac{9}{5} C + 32$$

Entre las escalas no uniformes las utilizadas con mayor frecuencia son las escalas logarítmicas $f(x) = \log x$.-

Sea (figura V.6) una recta r donde se fija un punto origen O; trácese una escala natural acotando los segmentos obtenidos al transportar la unidad elegida. Escríbanse bajo las cotas los números que son sus logaritmos -vale decir los antilogaritmos de aquéllos- (en la figura V.6 entre paréntesis). Borrando las cotas marcadas se obtiene una escala donde los números están ubicados según la posición de sus logaritmos, vale decir que se ha construído una escala logarítmica.-



- figura V.6 -

La regla de cálculos posee numerosas escalas logarítmicas, cuyos módulos m generalmente son 25 cm. y 12,5 cm.-

Para construir sobre un segmento una escala logarítmica $f(x) = \log x$, para x variando entre a y b, habrá que calcular su módulo m que, de acuerdo con (1), vale:

$$L = m\left[f(b) - f(a)\right]$$

Ejemplo: construir una escala logarítmica, sobre un segmento de 10 cm. de longitud, variando entre 0,01 y 100. Reemplazando:

$$10 \text{ cm.} = m\,(\log 100 - \log 0{,}01)$$

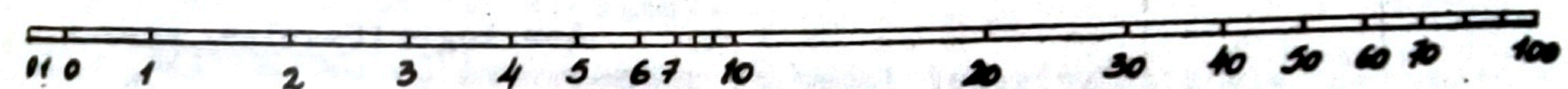
o sea:

$$10 \text{ cm.} = m\,(2 - \bar{2})$$
$$10 \text{ cm.} = 4\,m$$
$$m = 2{,}5 \text{ cm.}$$

Por lo tanto se medirán los valores de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$2{,}5\,(\log x - \log 0{,}01) \text{ cm.} = 2{,}5\,(\log x + 2) \text{ cm.}$$

La representación gráfica correspondiente se ha representado en la figura V.7.-



- figura V.7 -

Cuando un solo eje del plano coordenado tiene su escala logarítmica, el gráfico es semilogarítmico o logarítmico simple; en cambio si los dos ejes del mismo poseen sus escalas logarítmicas, el gráfico es logarítmico doble. Es muy útil el uso de este tipo de papel cuando se trabaja con gráficos en escalas logarítmicas.-

Múltiple es la utilidad que proporcionan las escalas logarítmicas para la representación gráfica de funciones. En primera observación se aprecia la posibilidad de representar puntos correspondientes a elevados valores de sus variables sin necesidad de emplear diagramas extensos o escalas de pequeños módulos, pero esta posibilidad, si bien es una ventaja, trae aparejada la dificultad de que no pueden representarse los puntos pues las interpolaciones no son lineales. La real ventaja radica en que funciones complicadas tienen una representación simple transformándose en funciones lineales. Tal es lo que sucede cuando se tratan de representar funciones exponenciales o potenciales.-

Sea la función exponencial:

$$y = f(x) = ab^x$$

donde a y b son constantes positivas. Atribuyendo logaritmos resulta:

$$\log y = \log a + x \log b$$

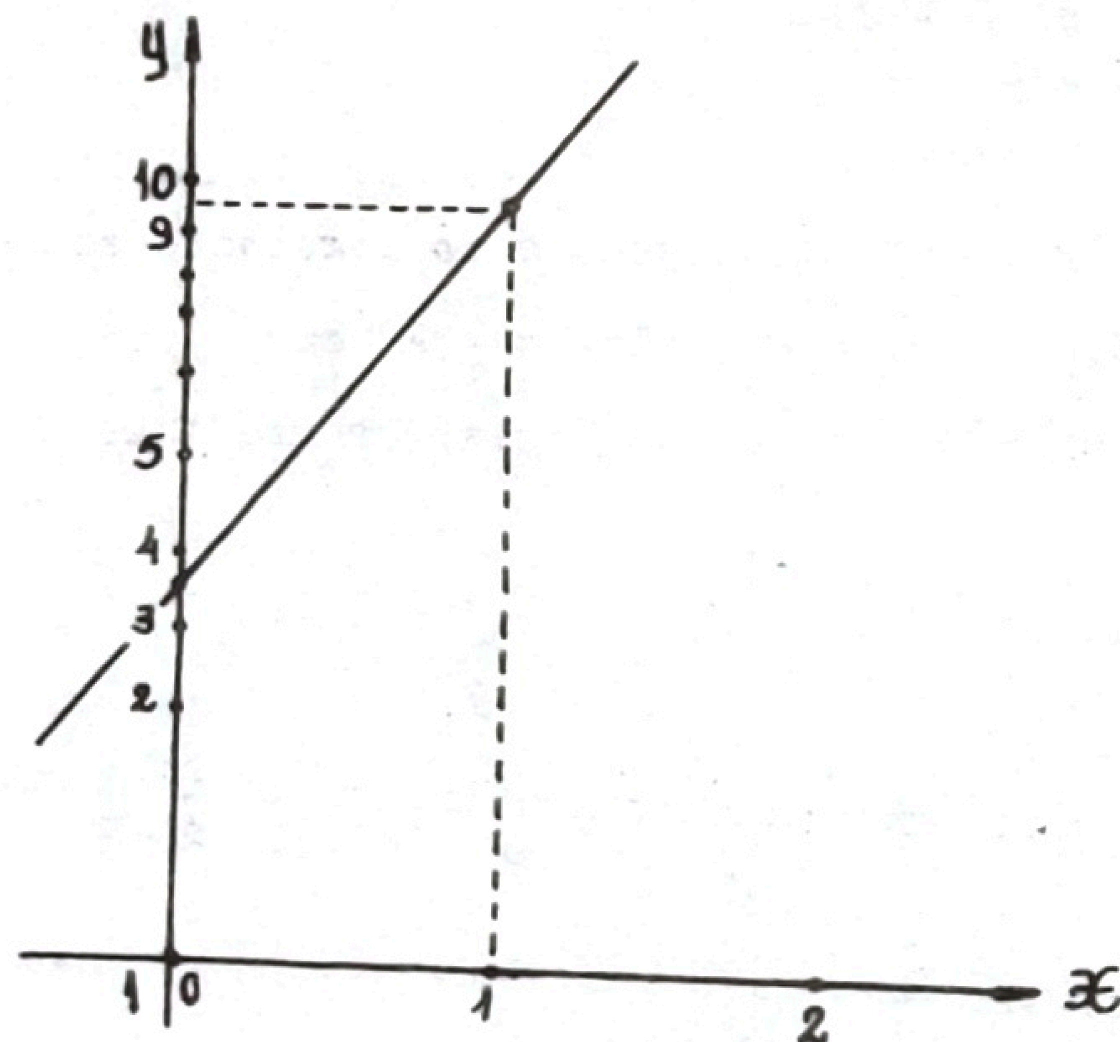
cuya representación gráfica (figura V.8) es una recta, dado que:

$$Y = m'. \log y$$
$$n = m'. \log a$$
$$X = \mu . x$$
$$m = \frac{m'}{\mu} \log b$$

o sea:

$$Y = mX + n$$

siendo m' módulo de la escala logarítmica y μ de la natural.-



- figura V.8 -

Así se ha realizado la anamorfosis o transformación de la función exponencial dada, en lineal.-

Se induce que: los gráficos logarítmicos simples de funciones lineales logaritmables son lineales.-

También se transforman en lineales las funciones potenciales logaritmables. Sea:

$$y = f(x) = ax^b$$

una función potencial, donde a y b son constantes. Tomando logaritmos resulta:

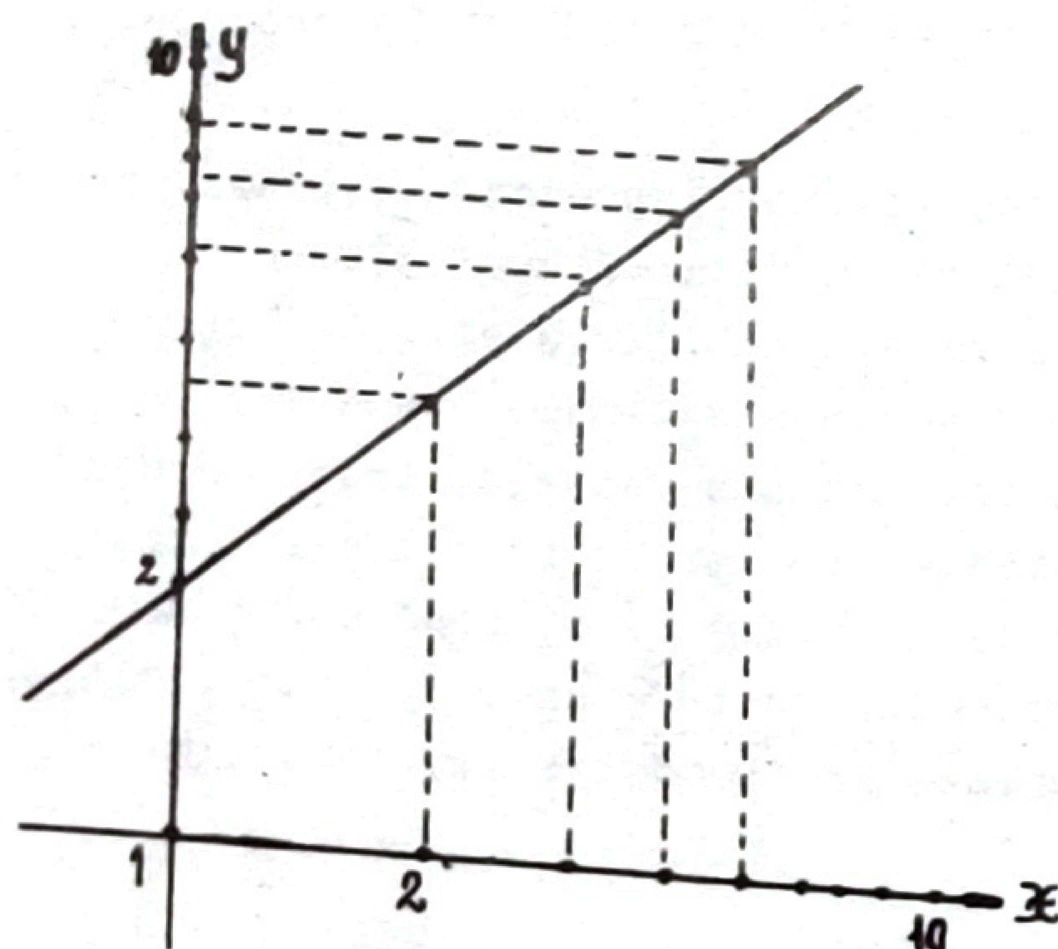
$$\log y = \log a + b \log x$$

cuya representación gráfica (figura V.9) es una recta, dado que:

$$X = m. \log x$$
$$Y = m. \log y$$
$$n = m. \log a$$

siendo m un módulo apropiado:

$$Y = bX + n$$



- figura V.9 -

Con ello se ha realizado también la anamorfosis de la función potencial.-

Se induce que: los gráficos doble-logarítmicos de funciones potenciales logaritmables son lineales.-

Ejemplos: a) sea representar $y = f(x) = 3,5e^x$. Se observa que para $x = 0$ es $f(x) = 3,5$ y para $x = 1$ es $f(x) = 9,5$. Uniendo los puntos A (0 ; 3,5) y B(1 ; 9,5) se obtiene por representación gráfica una recta (figura V.8)

b) sea representar $y = f(x) = 2x^{0,8}$. Tomando logaritmos en ambos miembros resulta:

$$\log y = \log 2 + 0,8 \log x$$

expresión que representa la ecuación de una recta en el plano coordenado ($Y = mX + n$) que puede trazarse conociendo un punto y su pendiente m ó dos puntos.

Como para $x = 1$ es $f(x) = 2$ y la pendiente $m = 0,8$, el trazado de la gráfica de la función es inmediato.(figura V.9).-

Las conclusiones obtenidas, si bien no son aplicables a expresiones no logaritmables (que contienen sumas o restas), mediante un pequeño artificio, es posible emplear escalas logarítmicas (simples o dobles) en las representaciones gráficas de tales expresiones. Este artificio consiste en omitir la representación del término aditivo o sustractivo cuando el mismo es constante aclarando que a toda lectura de ordenadas debe adosársele dicho valor.-

Utilizando gráficos logarítmicos (simples o dobles) no es posible representar números negativos. En ciertos casos puede obviarse la imposibilidad señalada trabajando con los valores absolutos de las cantidades y cambiando el signo en las escalas.-

EJERCICIOS: a) Representar en papel logarítmico doble las funciones:

$$f(x) = 0,4x^{1,8} \quad ; \quad f(x) = 3x^{-2,3} \quad ; \quad f(x) = 5,2x^{-1}$$

b) Representar en papel semilogarítmico las funciones:

$$f(x) = 8(0,34)^x \quad ; \quad f(x) = 0,2e^{0,7x} \quad ; \quad f(x) = 4(3,2)^x$$

c) Representar la gráfica semilogarítmica de la función:

$$f(x) = ab^{cx}$$

en el intervalo (0 , 10) y para los valores de a, b, c, respectivamente indicados a continuación:

1.- 1000 ; 2 ; -9 — 2.- 10.000 ; 4 ; -7

3.- -0,1 ; 8 ; 3 — 4.- -0,0001 ; 6 ; 5

d) Representar las gráficas doblelogarítmicas de las siguientes funciones en el intervalo $(10^{-4} ; 10^4)$

1.- $f(x) = 5x^4$; $f(x) = \dfrac{8}{x^6}$; $f(x) = -x^{\frac{7}{2}}$

2.- $f(x) = 8x^2$; $f(x) = \dfrac{2}{x^5}$; $f(x) = -x^{\frac{2}{3}}$

¿Qué artificio debe emplearse para poder representar las funciones de la última columna?

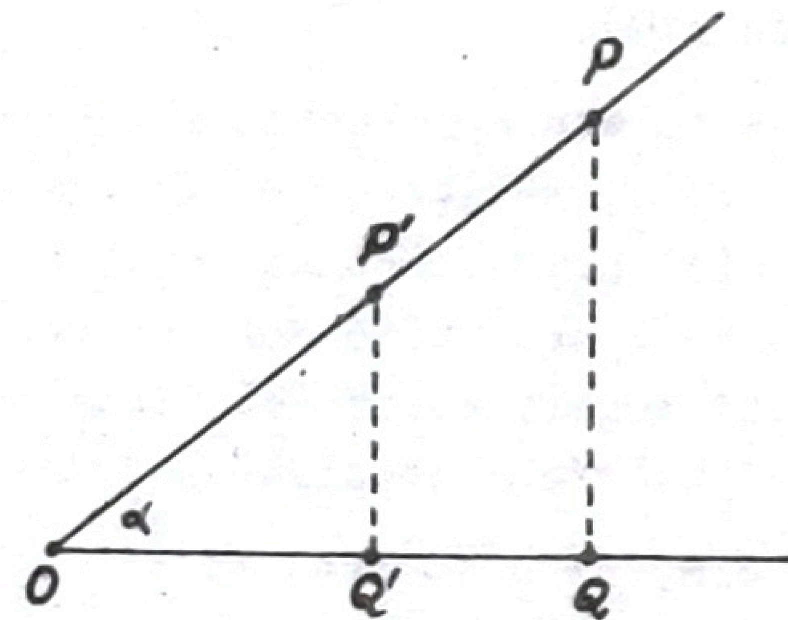
e) Probar que toda función exponencial (logaritmable) tiene gráfica semilogarítmica lineal. Idem que toda función potencial (logaritmable) tiene gráfica doble-logarítmica lineal.-

V.5.- <u>Funciones trigonométricas.</u>- Para definir las funciones trigonométricas de un ángulo agudo α = POQ (figura V.10), se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a $\overline{OQ}$ y con los segmentos así determinados se definen los valores:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \quad ; \quad \text{cosec } \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \quad ; \quad \sec \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} \quad ; \quad \text{cotg } \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}$$

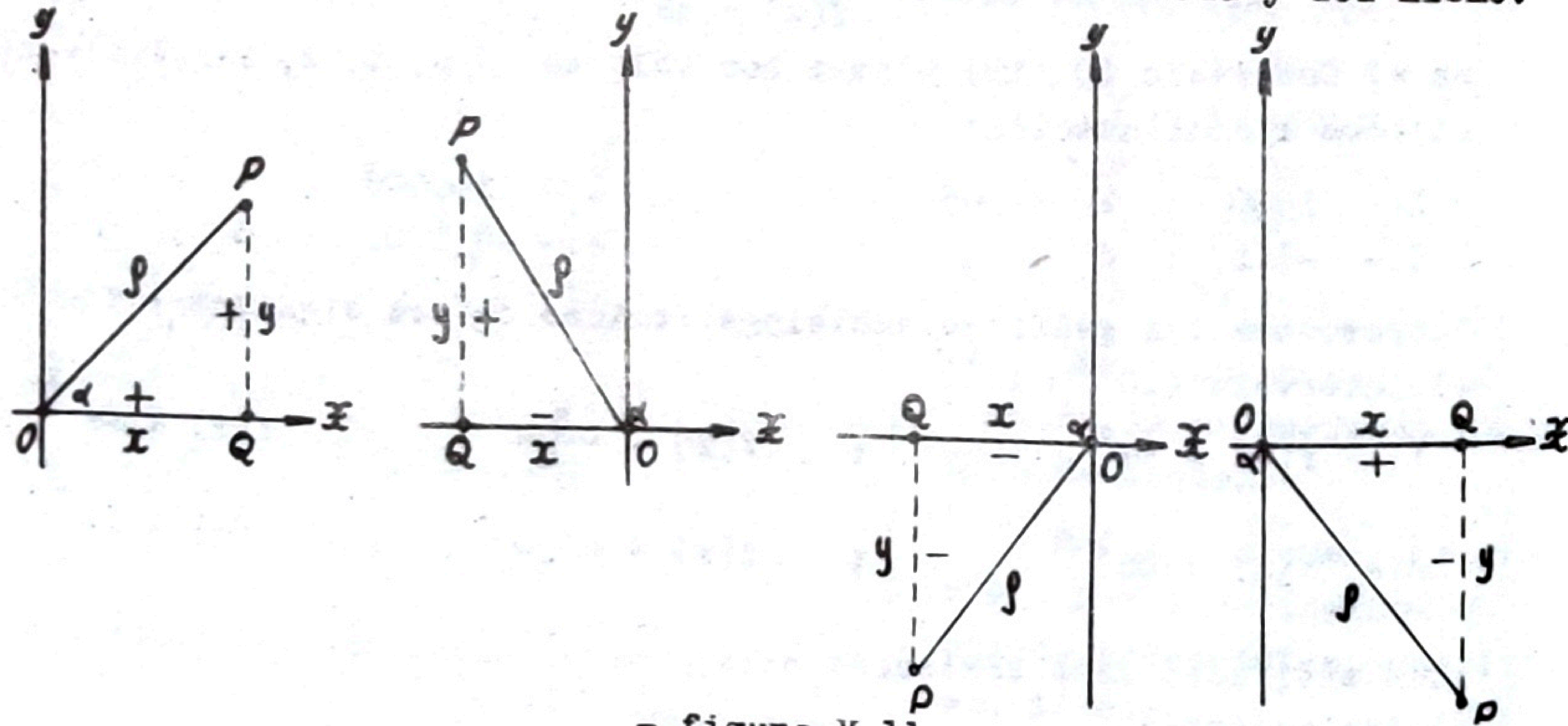


- figura V.10 -

Los valores de estas funciones son números, pues se trata de cocientes de segmentos y, por consiguiente, al medirse ambos con la misma unidad de longitud, esa unidad queda eliminada en el cociente.-

Las relaciones que definen las funciones trigonométricas solo dependen del ángulo α y no del punto P elegido, pues otro punto P' y su correspondiente Q' determinarían el triángulo OP'Q' (figura V.10) semejante al triángulo OPQ; luego: $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{OP'}}$, $\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}$, ... son proporcionales a $\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$, $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$, ..., respectivamente.-

Para generalizar las definiciones de las funciones trigonométricas del ángulo POQ = α al caso de ángulos mayores que un recto (o a ángulos negativos) se considera un sistema de ejes cartesianos de origen O cuyo eje de abscisas coincida con la recta OQ (figura V.11). Entonces: $\overline{OP}$ es radio vector ρ del punto P; $\overline{OQ}$ es su abscisa x,y $\overline{PQ}$ es la ordenada y del mismo.-



- figura V.11 -

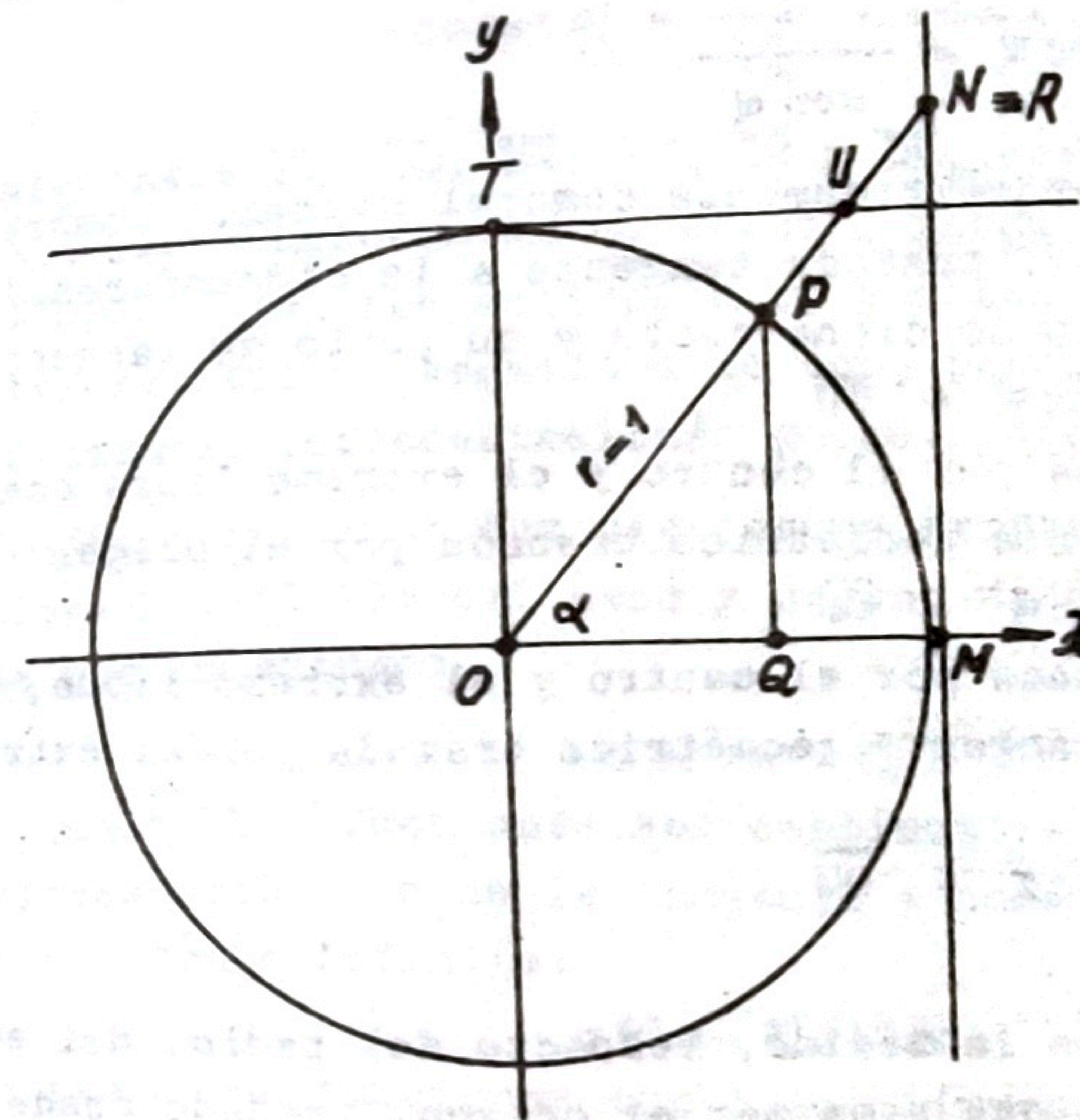
Recordando el signo de x e y en los cuatro cuadrantes del plano coordenado y considerando -por convención- a ρ positivo, las funciones trigonométricas tendrán un signo determinado en cada uno de ellos, pudiendo escribirse:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{\rho} \quad ; \quad \text{cosec } \alpha = \frac{\rho}{y}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} \quad ; \quad \sec \alpha = \frac{\rho}{x}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} \quad \quad \text{cotg } \alpha = \frac{x}{y}$$

Dado que la medida de los ángulos centrales de una circunferencia son iguales a la de sus arcos correspondientes, las funciones trigonométricas también pueden definirse -en forma general- en base al procedimiento geométrico expuesto a continuación, de la circunferencia unidad.-



- figura V.12 -

Circunferencia unidad o círculo trigonométrico es una circunferencia de radio r = 1 con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y sobre la cual se ha elegido un sentido positivo de recorrido: el contrario al de la marcha de agujas de un reloj. En consecuencia será posible trazar ángulos orientados (figura V.12), es decir, ángulos positivos y negativos.-

Ejemplo: se observa en la figura V.12 que al centrar un ángulo en la circunferencia unidad se lo coloca a partir del eje de abscisas OX; por esta razón, el punto M se llama origen de los arcos.-

A cada ángulo orientado α, una vez centrado, corresponde un punto P de la circunferencia unidad cuyas coordenadas se llaman respectivamente coseno y seno del ángulo α dado; es decir que:

$$\cos \alpha = \overline{OQ} = x \quad \text{(abscisa de P)}$$
$$\text{sen } \alpha = \overline{PQ} = y \quad \text{(ordenada de P)}$$

La función tangente puede definirse por la relación:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

y, por consiguiente, no está definida para los ángulos α cuyo coseno es cero pues el cociente entonces carece de significado. Esta función resulta igual a la ordenada del punto N de la figura V.12:

$$\text{tg } \alpha = \overline{MN}$$

De las definiciones anteriores se deduce fácilmente que dos ángulos complementarios tienen su seno y coseno respectivamente iguales; o sea que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha\right]$$

Las funciones cotangente, secante y cosecante del ángulo quedan definidas por las relaciones:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

pero también pueden definirse geométricamente como: el segmento comprendido en la paralela al eje de abscisas trazada tangente a la circunferencia unidad y que abarca la intersección de dicha recta y su punto de tangencia:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \overline{TU}$$

el segmento de la recta que pasa por el centro y el extremo libre comprendido entre el centro y la tangente geométrica trazada por el origen:

$$\sec\alpha = \overline{OR}$$

y el segmento de la recta que pasa por el centro y el extremo libre, comprendido entre el centro y la tangente geométrica trazada por el extremo del primer cuadrante:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \overline{OU}$$

En resumen:

a) seno de un ángulo α (arco) es la medida, respecto del radio, del segmento perpendicular al diámetro que pasa por el origen, trazado desde el extremo libre:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} = y = \text{medida de } \overline{PQ}$$

b) coseno de un ángulo α (arco) es la medida, respecto del radio, de la parte del diámetro que pasa por el origen, comprendida entre el centro y el pie de la perpendicular a dicho diámetro trazada por el extremo libre:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} = x = \text{medida de } \overline{OQ}$$

c) tangente de un ángulo α (arco) es la medida, respecto del radio, del segmento de la tangente geométrica trazada por el origen, limitado por el origen y la prolongación del diámetro que pasa por el extremo libre:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x} = \text{medida de } \overline{MN}$$

d) cotangente de un ángulo α (arco) es la medida, respecto del radio, del segmento de la tangente geométrica trazada por el extremo del primer cuadrante, limitado por dicho extremo y la prolongación del diámetro que pasa por el extremo libre:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{x}{y} = \text{medida de } \overline{TU}$$

e) secante de un ángulo α (arco) es la medida, respecto del radio, del segmento de la recta que pasa por el centro y el extremo libre, comprendido entre el centro y la tangente geométrica trazada por el origen:

$$\sec\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{x} = \text{medida de } \overline{OR}$$

f) cosecante de un ángulo α (arco) es la medida, respecto del radio, del segmento de la recta que pasa por el centro y el extremo libre, comprendido entre el centro y la tangente geométrica trazada por el extremo del primer cuadrante:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{y} = \text{medida de } \overline{OU}$$

Los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$, $\overline{MN}$, $\overline{TU}$, $\overline{OR}$ y $\overline{OU}$, cuyas medidas, respecto del radio, definen las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo, respectivamente, reciben el nombre general de líneas trigonométricas. Dichos segmentos no son, pues, funciones trigonométricas sino, simplemente, representaciones geométricas de esas funciones.-

De lo dicho resultan las siguientes propiedades:

1. los valores absolutos del seno y coseno de un ángulo α (arco) nunca son mayores que la unidad:

$$-1 \leq /\alpha/ \leq 1$$

por lo tanto, las funciones son contínuas.-

2. los valores absolutos de la tangente y cotangente de un ángulo α (arco) varían de cero a infinito:

$$-\infty < /\alpha/ < \infty$$

por lo tanto las funciones son discontínuas.-

3. los valores absolutos de la secante y cosecante de un ángulo α (arco) nunca son menores que la unidad:

$$-\infty < /\alpha/ \leq -1$$
$$1 \leq /\alpha/ < \infty$$

por lo tanto las funciones son discontínuas.-

V.6.- Función sinusoidal: tipo: $f(x) = k \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$.- Sea la función:

$$y = f(x) = k \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$$

conocida por el nombre de función sinusoidal; su intervalo de definición, dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$, $[-\infty, \infty]$, es infinito y abierto.-

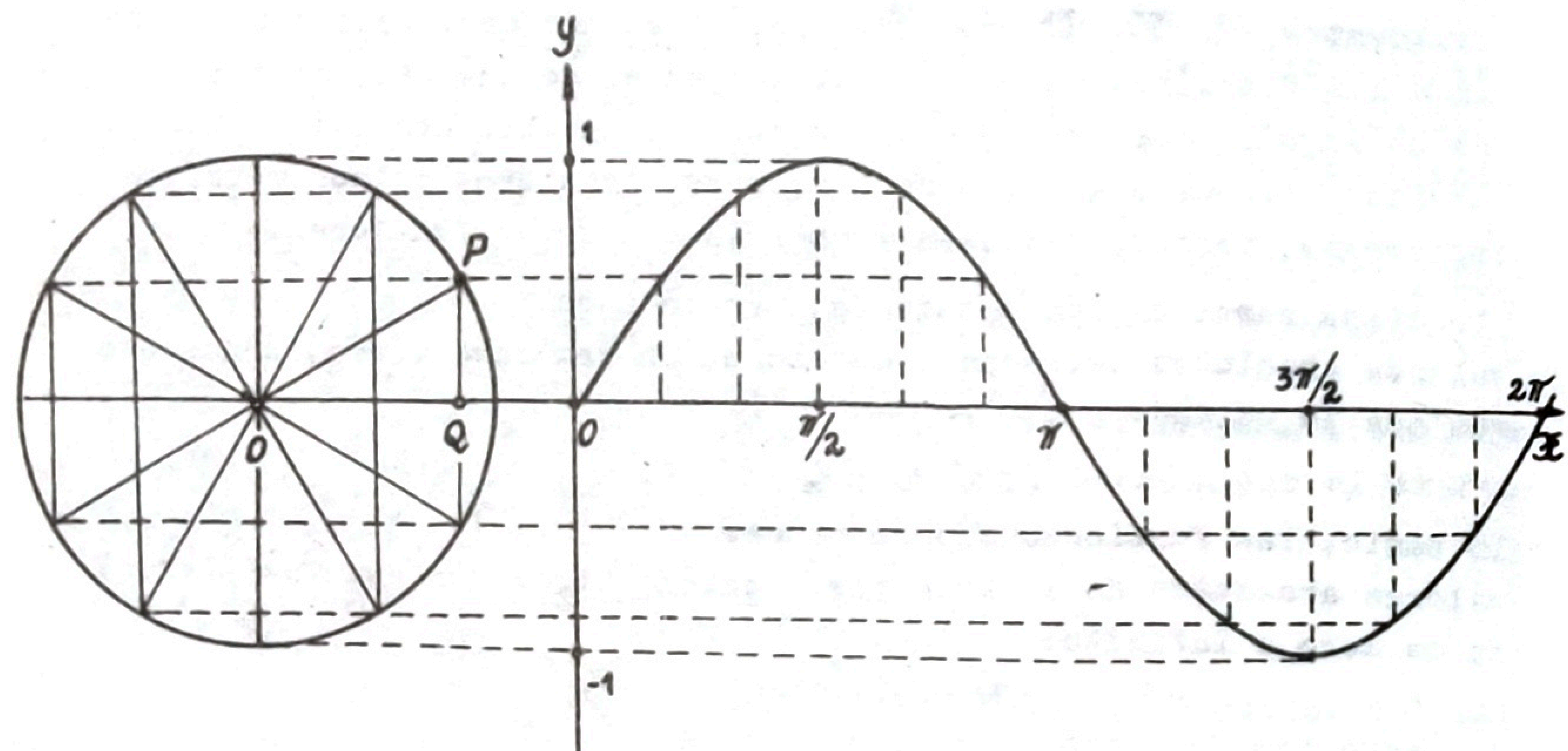
Como a valores opuestos de la variable independiente x corresponden valores opuestos para f(x), la función es impar: $f(-x) = -f(x)$.-

Representemos gráficamente la función sinusoidal (haciendo $k = \omega = 1; \alpha = 0$) o sea cuando se reduce a su expresión más simple:

$$y = f(x) = \operatorname{sen} x$$

Sea (figura V.13) una circunferencia unidad y un ángulo x variable, cuyo lado libre determina sobre ella un punto P. Al variar x, también lo hará P y, en consecuencia su ordenada $\overline{PQ}$, que geométricamente representa a la función sen x.-

De esta manera, en el primer cuadrante -donde sus valores extremos son 0 y $\frac{\pi}{2}$- la medida de $\overline{PQ}$ = sen x varía desde 0 hasta 1 pasando por todos los valores intermedios, al hacerlo el ángulo x; en el segundo cuadrante -donde sus valores extremos son $\frac{\pi}{2}$ y π -, lo hace desde 1 hasta 0 pasando por todos los valores intermedios, al variar x; en el tercero $(\pi, \frac{3\pi}{4})$, $\overline{PQ}$ = sen x varía desde 0 hasta -1; y finalmente en el cuarto cuadrante $(\frac{3\pi}{4}, 2\pi)$, aquélla varía desde -1 hasta 0, al hacerlo el ángulo x.-



- figura V.13 -

Para valores de x mayores a 2π $(x > 2\pi)$ la medida de los correspondientes valores de $\overline{PQ}$ se repiten en el orden indicado precedentemente; asimismo eso sucede para valores de x menores a 0 $(x < 0)$, es decir para valores negativos, y de allí entonces que la representación gráfica de la función sen x pueda simplificarse tomando los valores límites 0 y 2π del ángulo variable x.-

Llevando sobre un sistema de coordenadas cartesianas (figura V.13) los valores del ángulo x variable así como los correspondientes a su ordenada $\overline{PQ}$ se obtienen puntos que unidos permiten construir la gráfica de la función $f(x)$ = sen x dada.-

En la función sen x, cuando la variable independiente x aumenta en 2π (es decir, pasa de x a $x + 2\pi$), el punto P da una vuelta completa a la circunferencia unidad y vuelve a ocupar la misma posición que antes (figura V.13); por lo tanto:

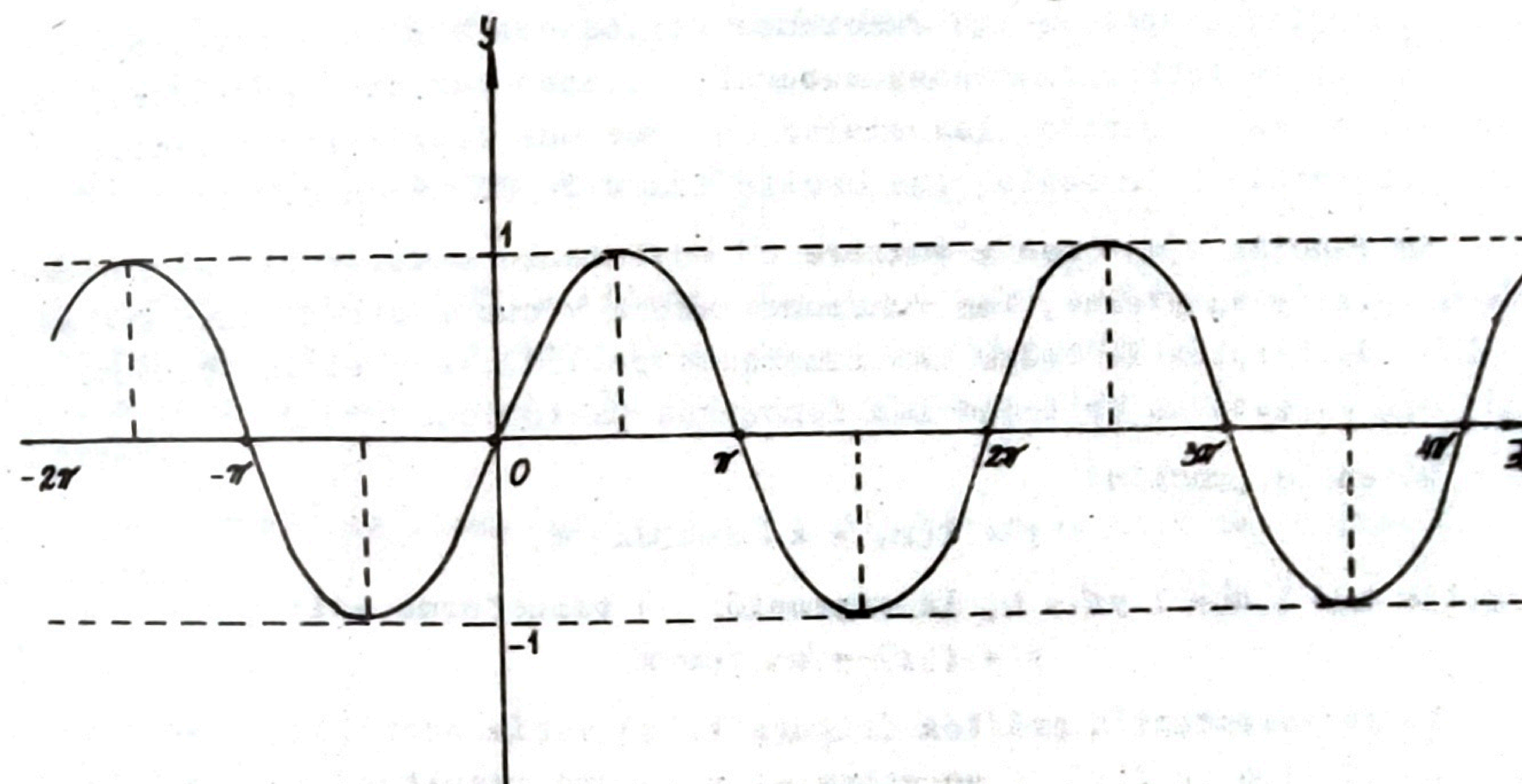
$$f(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x$$

Como esta relación vale para todo valor de x, diremos que $f(x)$ = sen x es una función periódica y que 2π es un período de sen x. Por ello, basta conocer la gráfica de $f(x)$ = sen x en el intervalo $(0, 2\pi)$, porque entonces se la puede prolongar hacia uno y otro lado, construyendo sucesivas réplicas de este trozo fundamental (onda de sinusoide) (figura V.14).-

En general: una función $y = f(x)$ es periódica en el período p, cuando:

$$f(x + p) = f(x)$$

para todo x, o sea cuando: los valores de $f(x)$ se suceden en un mismo orden luego de un cierto intervalo, llamado período.-



- figura V.14 -

Se induce que todo múltiplo np de un período es también un período. En símbolos:

$$f(x + np) = f(x + \overbrace{p + p + \dots + p}^{n}) = f(x + p) = f(x) \qquad (1)$$

Si p y q son períodos de $f(x)$, lo es la diferencia $p - q$, dado que por (1):

$$f(x + p - q) = f(x + p) = f(x)$$

Si $f(x)$ es una función periódica que no se reduce a una constante, sus períodos son los múltiplos enteros del menor período positivo p, y solo ellos.-

En efecto: sea q un período; probaremos que debe ser múltiplo del menor período positivo p, si $f(x)$ no se reduce a una constante. Dividiendo q por p se obtiene, llamando n al cociente entero y r al resto:

$$q = np + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leq r < p$$

luego:

$$r = q - np$$

pero como r es un período, por ser diferencia de dos períodos q y np, como

por hipótesis p es el menor período positivo, resulta r = 0, luego q = np ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$).-

El número p se llama período primitivo de f(x). Si en lugar de los múltiplos enteros de p hubiéramos tomado los de otro período, por ejemplo 3p, tendríamos sólo algunos de los períodos de f(x); de ahí la importancia de encontrar un período que sea primitivo; para tenerlos todos.-

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene el período 2π, pero también tiene el período π, pues:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Este es su período p primitivo.-

Las aplicaciones de las funciones períodicas son sumamente importantes y variadas. Muchos fenómenos naturales tienen carácter periódico, tales como las ondas de sonido, las vibraciones de una cuerda instrumental, las ondas luminosas o de radio, las oscilaciones de un péndulo, etc.

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ sugiere un movimiento ondulatorio en su forma más simple, y en efecto, las funciones sen x y cos x deben considerarse como las más simples de todas las funciones periódicas y el instrumento natural para el estudio de todos los fenómenos periódicos.

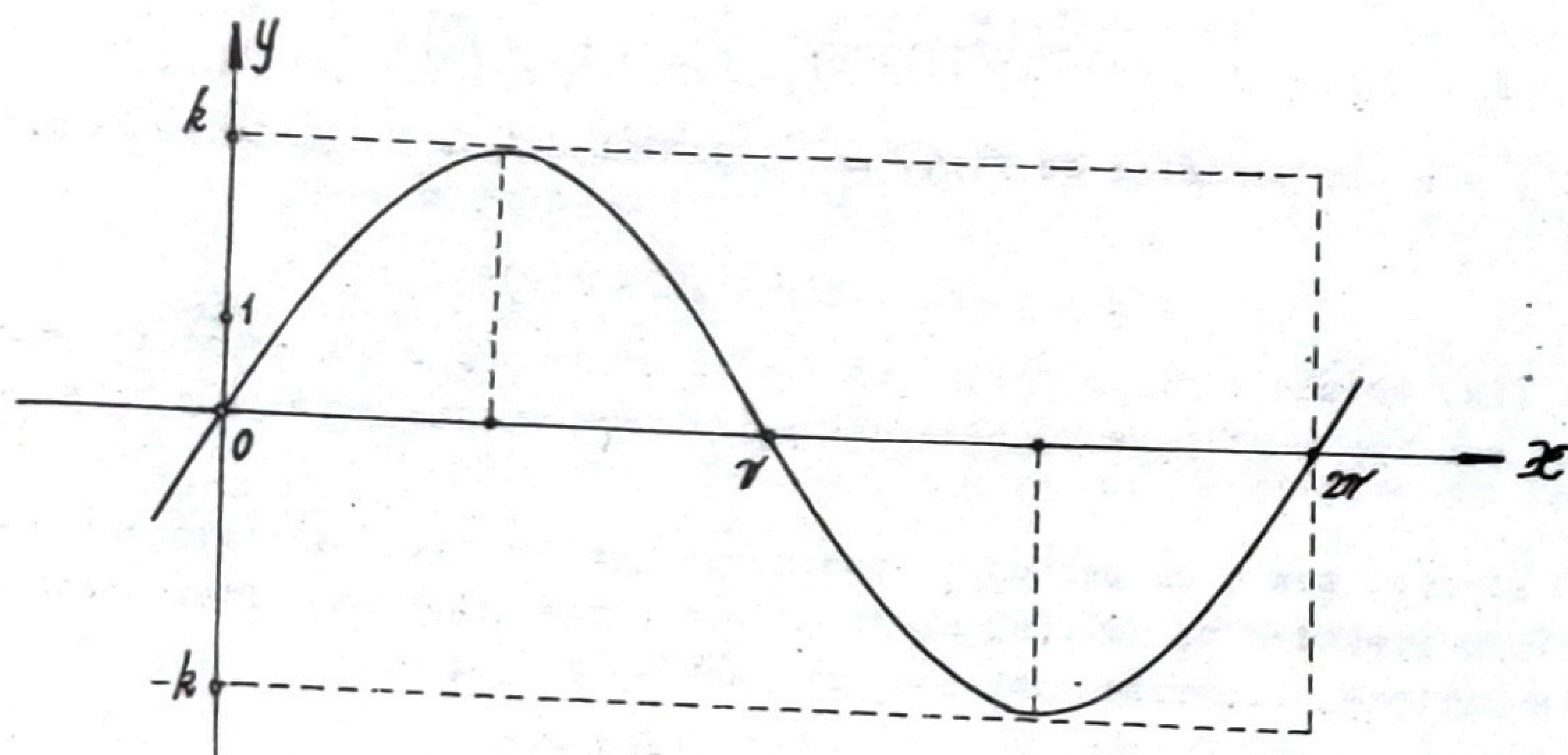
Si en la función:

$$y = f(x) = k \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$$

resulta $k \neq 1; \omega = 1$ y $\alpha = 0$, la expresión se transforma así:

$$y = f(x) = k \cdot \operatorname{sen} x$$

La representación gráfica (figura V.15) varía ahora entre -k y k como valores límites de f(x), y no entre -1 y 1 como resultara en las figuras V. 13 y 14. Ello así porque la constante k (que es distinta de 1) determina que la amplitud de la onda sea ahora (figura V.15) más levantada o achatada que antes (figuras V.13 y 14), según su valor.-



- figura V.15 -

Por tal razón, la constante k se llama amplitud de la función sinusoidal. Cuando es negativa ($k < 0$) la onda cambia su orientación.-

EJEMPLO: en la figura V.15 se ha representado gráficamente una onda de la función: $y = f(x) = 3 \operatorname{sen} x$.-

Si en la función:

$$y = f(x) = k \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$$

hacemos $k \neq 1; \omega > 0$ y $\alpha = 0$, la expresión se transforma así:

$$y = f(x) = k \cdot \operatorname{sen} \omega x$$

El período p primitivo es $\frac{2\pi}{\omega}$. En efecto:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = k \cdot \operatorname{sen}\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = k \cdot \operatorname{sen} \omega x = f(x)$$

y resulta porque, si:

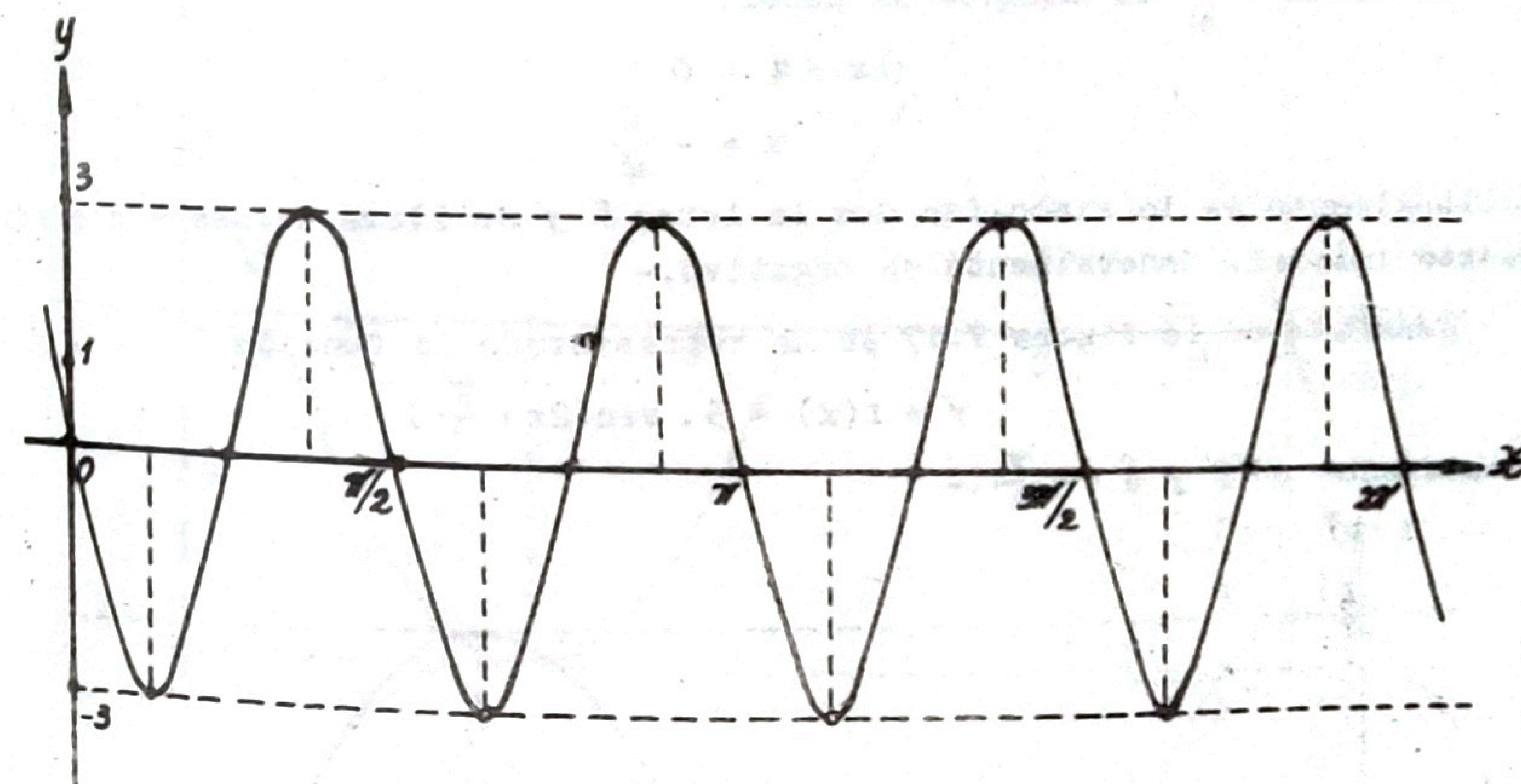
$$p = x - x'$$

siendo $\omega x = 2\pi$ y $\omega x' = 0$, reemplazando es:

$$p = \frac{2\pi}{\omega} - 0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

La representación gráfica (figura V.16) no sufre mayores modificaciones con respecto a la correspondiente de la función anterior (figura V.15), pues solo en el intervalo $(0, 2\pi)$ resultan mayor o menor número de ondas sinusoidales.-

La constante ω se llama pulsación o coeficiente angular de la función sinusoidal.-



- figura V.16 -

EJEMPLO: en la figura V.16 se ha representado gráficamente la función: $f(x) = -3 \cdot \operatorname{sen} 4x$, y resultando $p = \frac{\pi}{2}$, en 2π se ubican 4 ondas.-

Del ejemplo se induce entonces que: cuando la pulsación es un número entero, indica el número de ondas que tiene la representación gráfica de la función sinusoidal en cada intervalo de longitud 2π.-

Finalmente: si $k \neq 1$; $\omega > 0$ y $\alpha \neq 0$, la expresión general de la función sinusoidal es la que resulta:

$$y = f(x) = k \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$$

Su período p primitivo también es $\frac{2\pi}{\omega}$, porque:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = k \cdot \operatorname{sen}\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = k \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \alpha) = f(x)$$

y resulta al hacer:

$$p = x - x'$$

siendo:

$$\omega x + \alpha = 2\pi$$
$$\omega x' + \alpha = 0$$

porque entonces reemplazando es:

$$p = \frac{2\pi - \alpha}{\omega} - \left[-\frac{\alpha}{\omega}\right] = \frac{2\pi - \alpha + \alpha}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

La representación gráfica (figura V.17) tampoco sufre mayores modificaciones con respecto a la correspondiente de la correspondiente de la función anterior (figura V.16). La diferencia consiste en que la onda no comienza en el origen del sistema de coordenadas sino en el punto $P(-\frac{\alpha}{\omega}, 0)$ debido al valor de la constante α, llamada fase inicial de la función sinusoidal.-

El valor $-\frac{\alpha}{\omega}$ se obtiene al hacer:

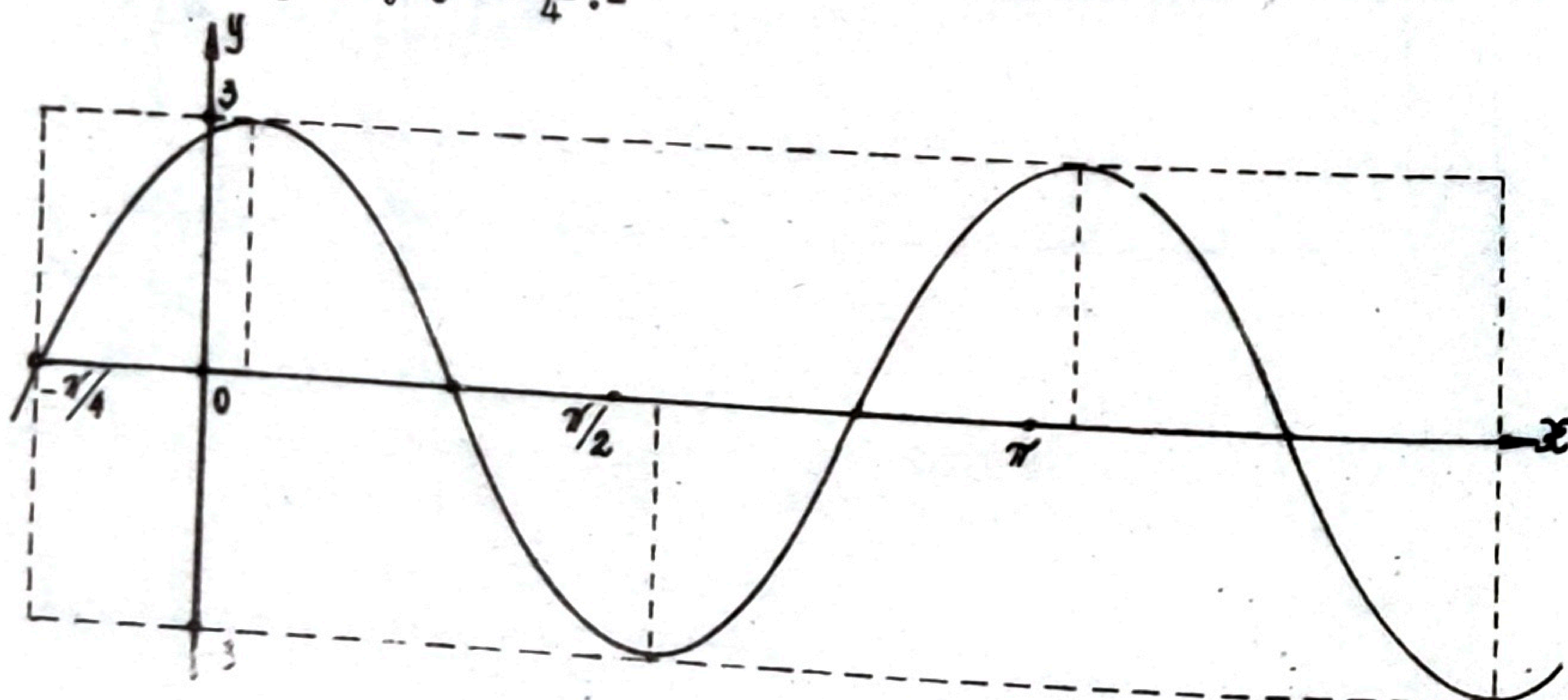
$$\omega x + \alpha = 0$$
$$x = -\frac{\alpha}{\omega}$$

Habitualmente se lo simboliza con la letra δ y se llama defasaje o corrimiento inicial. Generalmente es negativo.-

EJEMPLO: en la figura V.17 se ha representado la función:

$$y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

resultando: $p = \pi$ y $\delta = -\frac{\pi}{4}$.-



- figura V.17 -

Para construir una onda se recomienda el siguiente procedimiento:

a) Determinar el período p primitivo y defasaje inicial:

$$p = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \delta = -\frac{\alpha}{\omega}$$

b) Trazar los ejes coordenados adoptando escalas tales que un período completo de la función tenga lugar en el diagrama.

c) Ubicar el punto $P(-\frac{\alpha}{\omega}, 0)$ y hacia su derecha, o sea en el sentido positivo de abscisas, determinar el período p primitivo.

d) Trazar paralelas al eje de abscisas a las distancias $y = -k$; $y = k$; al eje de ordenadas a las distancias $x = -\frac{\alpha}{\omega}$ y $x = p - \frac{\alpha}{\omega} = \frac{2\pi - \alpha}{\omega}$

e) Dividir el período p primitivo en cuatro partes iguales.

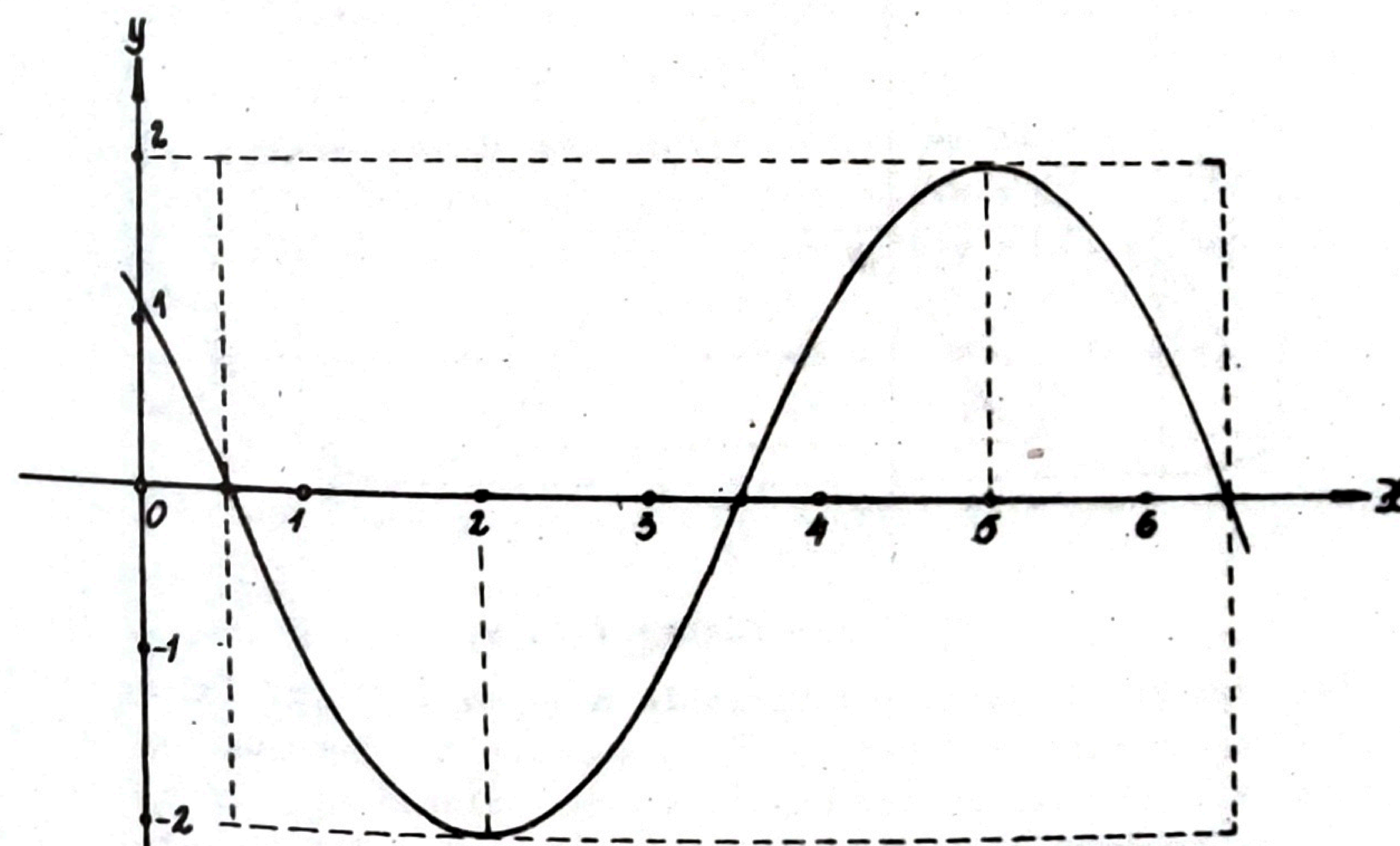
f) Marcar los puntos en que la curva corta al eje de abscisas y a las paralelas al mismo.

g) Trazar la onda (tener presente que en los puntos máximos resulta tangente a las paralelas al eje de abscisas).-

Mediante el procedimiento indicado, en la figura V.18 se ha representado una onda completa de la función:

$$y = f(x) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

donde $k = -2$; $p = 6$ y $\delta = \frac{1}{2}$.-



- figura V.18 -

FUNCION TIPO: $f(x) = k \cdot \cos(\omega x + \alpha)$.- Sea la función:

$$y = f(x) = k \cdot \cos(\omega x + \alpha)$$

Su intervalo de definición, dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty \;]-\infty, \infty[$, es infinito y abierto.-

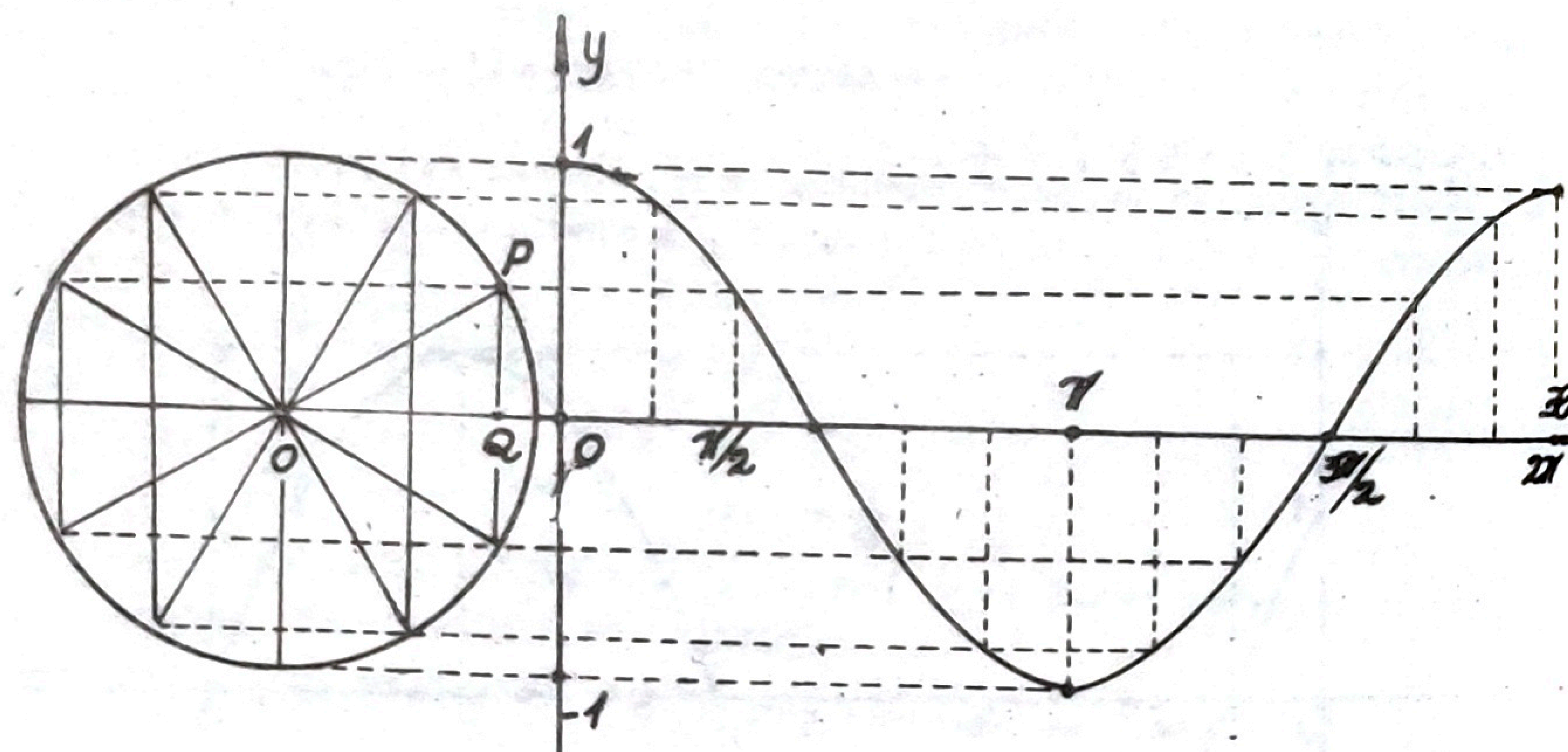
Como a valores opuestos de la variable independiente x corresponden los mismos valores para $f(x)$, la función es par: $f(x) = f(-x)$.-

Representemos gráficamente la función en su expresión más simple; cuando $k = \omega = 1$ y $\alpha = 0$, resulta:

$$y = f(x) = \cos x$$

Sea (figura V.19) la circunferencia unidad y un ángulo x variable, cuyo lado libre determina sobre ella un punto P. Al variar x también lo hará P y en consecuencia su ordenada $\overline{OQ}$, que geométricamente representa a la función cos x.-

Entonces: en el primer cuadrante $(0, \frac{\pi}{2})$, la medida de $\overline{OQ} = \cos x$ varía desde 1 hasta 0 pasando por todos los valores intermedios, al hacerlo el ángulo x; en el segundo cuadrante $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ lo hace desde 0 hasta -1, al variar x; en el tercer cuadrante $(\pi, \frac{3\pi}{4})$, $\overline{OQ} = \cos x$ varía desde -1 hasta 0, al variar x; y finalmente en el cuarto cuadrante $(\frac{3\pi}{4}, 2\pi)$, aquélla varía desde 0 hasta 1 al hacerlo el ángulo x.-



- figura V.19 -

Para valores del ángulo x variable mayores a 2π $(x > 2\pi)$ la medida de los correspondientes valores de $\overline{OQ}$ se suceden tal como se indicó precedentemente. Ello también ocurre cuando x toma valores menores a 0 $(x < 0)$. Por tal motivo entonces la representación gráfica de la función $f(x) = \cos x$ puede simplificarse tomando los valores límites 0 y 2π de su ángulo x variable.-

Al llevar sobre un sistema de coordenadas cartesianas (figura V.19) los valores del ángulo x variable y los de su abscisa $\overline{OQ}$, obtiénense puntos que unidos permiten construir la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ dada.-

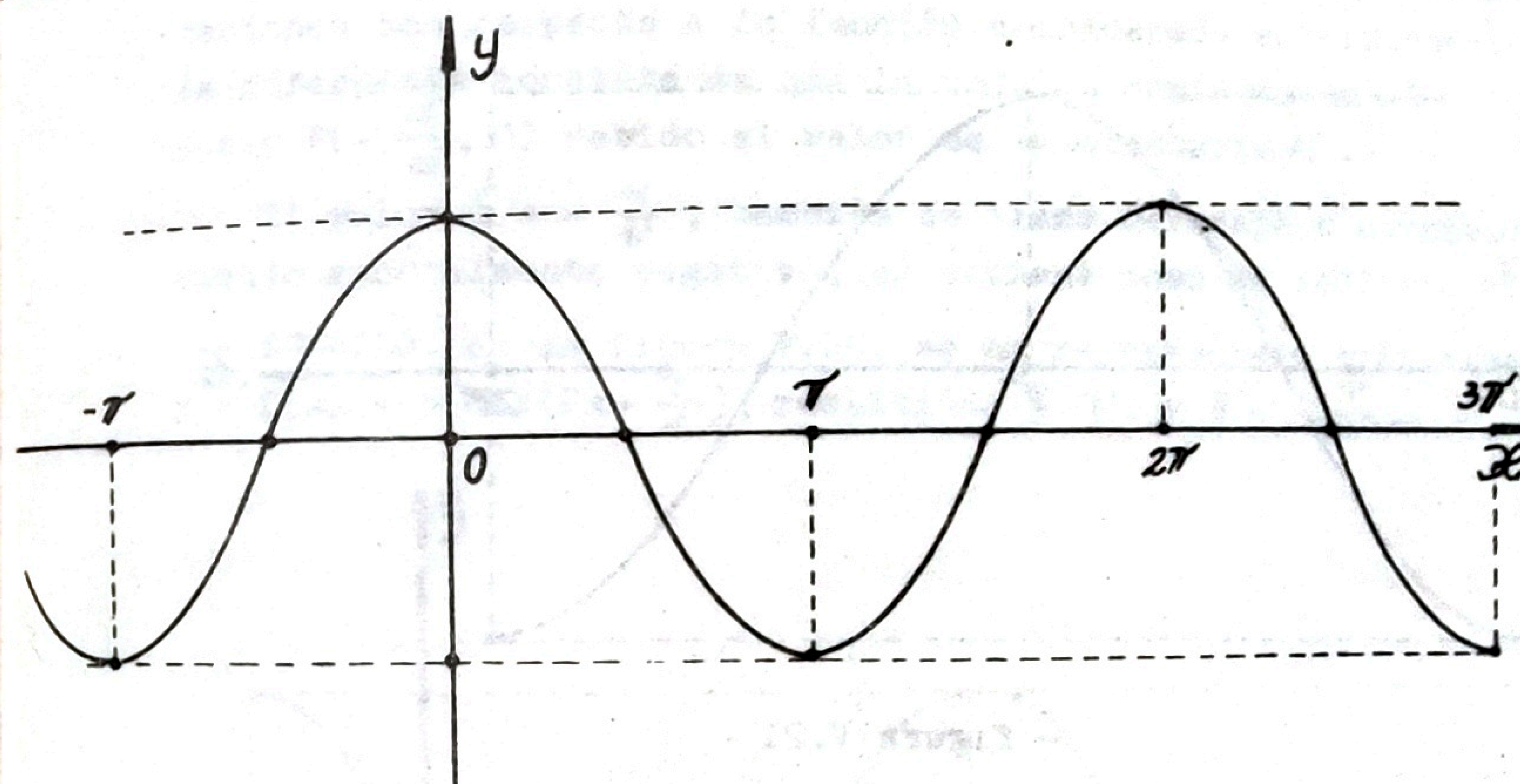
La función $f(x) = \cos x$ también es periódica y de período p primitivo 2π. En efecto: se observa (figura V.19) que cuando la variable independiente x aumenta en 2π, el punto P del lado libre da una vuelta completa en la circunferencia unidad y vuelve a ocupar su anterior posición:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

o sea:

$$\cos(x + p) = \cos x$$

relación válida para todo valor de x. De allí entonces que sea necesario obtener en el intervalo $(0, 2\pi)$ la gráfica de la función $f(x) = \cos x$, porque por extensión podrán construirse así sucesivas réplicas de este trozo fundamental (onda) (figura V.20).-



- figura V.20 -

Comparando la representación gráfica, obtenida en la figura V.19, de la función $f(x) = \cos x$ y la de la función $f(x) = \text{sen } x$ (figura V.13), se observa que ambos diagramas son iguales encontrándose aquélla desplazada en $\frac{\pi}{2}$ con respecto a ésta. Por tal motivo $f(x) = \cos x$ es función sinusoidal. Operando analíticamente resulta, teniendo en cuenta que $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \cos x$ respectivamente son funciones impar y par, que:

$$\text{sen}\left[\frac{\pi}{2} + x\right] = \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - (-x)\right] = \cos(-x) = \cos x$$

Si en la función:

$$y = f(x) = k\cos(\omega x + \alpha)$$

es k (amplitud) distinto de 1 $(k \neq 1)$; $\omega = 1$ y $\alpha = 0$, resulta:

$$y = f(x) = k \cdot \cos x$$

La representación gráfica (figura V.21) varía ahora entre -k y k, y la amplitud de la onda, según sea su valor, resulta ahora más levantada o achatada que antes (figuras V.19 y 20). Si k es negativo $(k < 0)$ la onda cambia su orientación.-

EJEMPLO: en la figura V.21 se ha representado gráficamente la función $f(x) = -3 \cdot \cos x$.-

Si en la función:

$$y = f(x) = k \cdot \cos(\omega x + \alpha)$$

es $k \neq 1$; $\omega > 0$ (pulsación) y $\alpha = 0$, resulta:

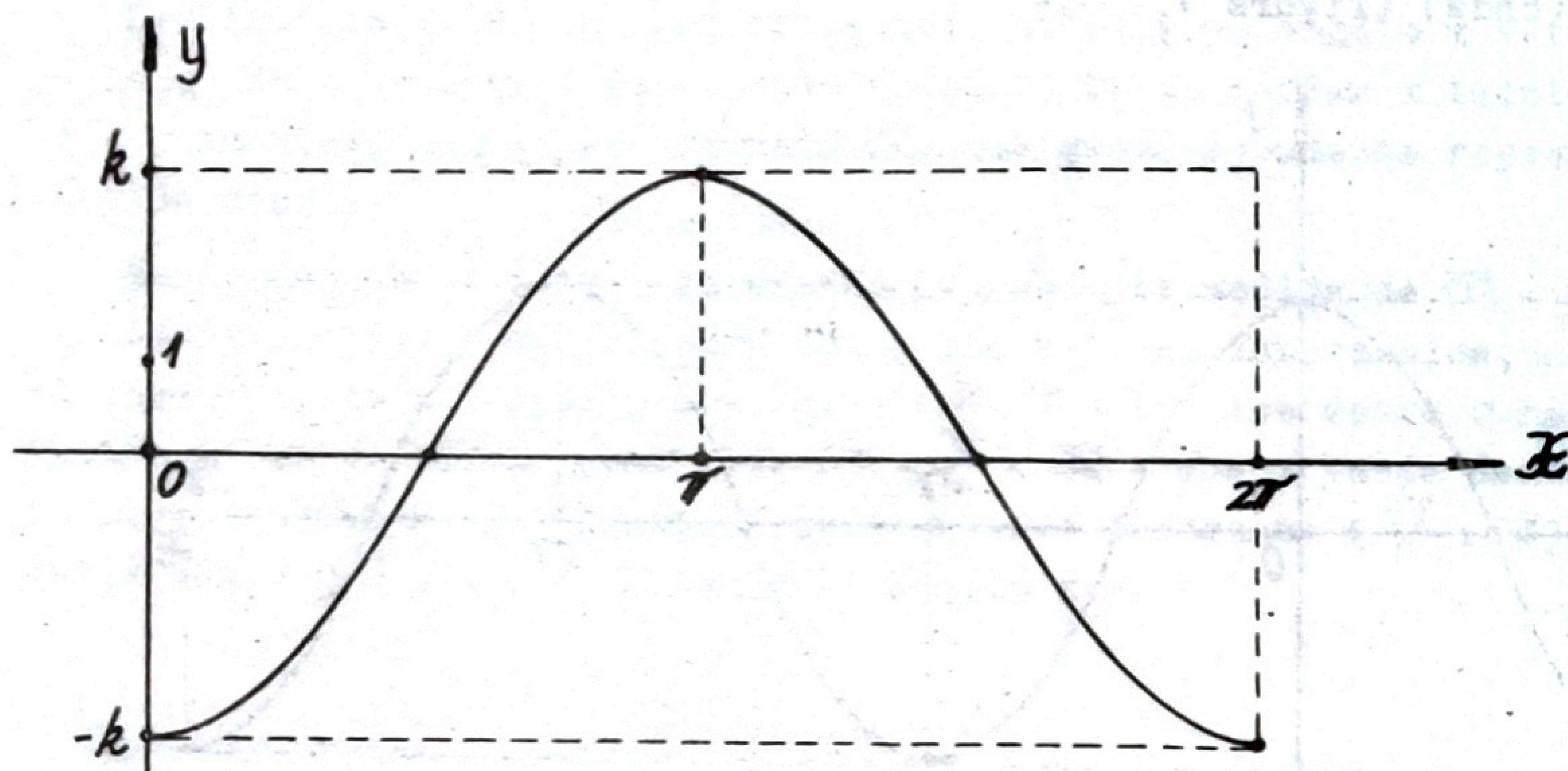
$$y = f(x) = k \cdot \cos \omega x$$

Su período p primitivo es $\frac{2\pi}{\omega}$, porque:

$$f\left[x + \frac{2\pi}{\omega}\right] = k \cdot \cos\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right] = k \cdot \cos\omega x = f(x)$$

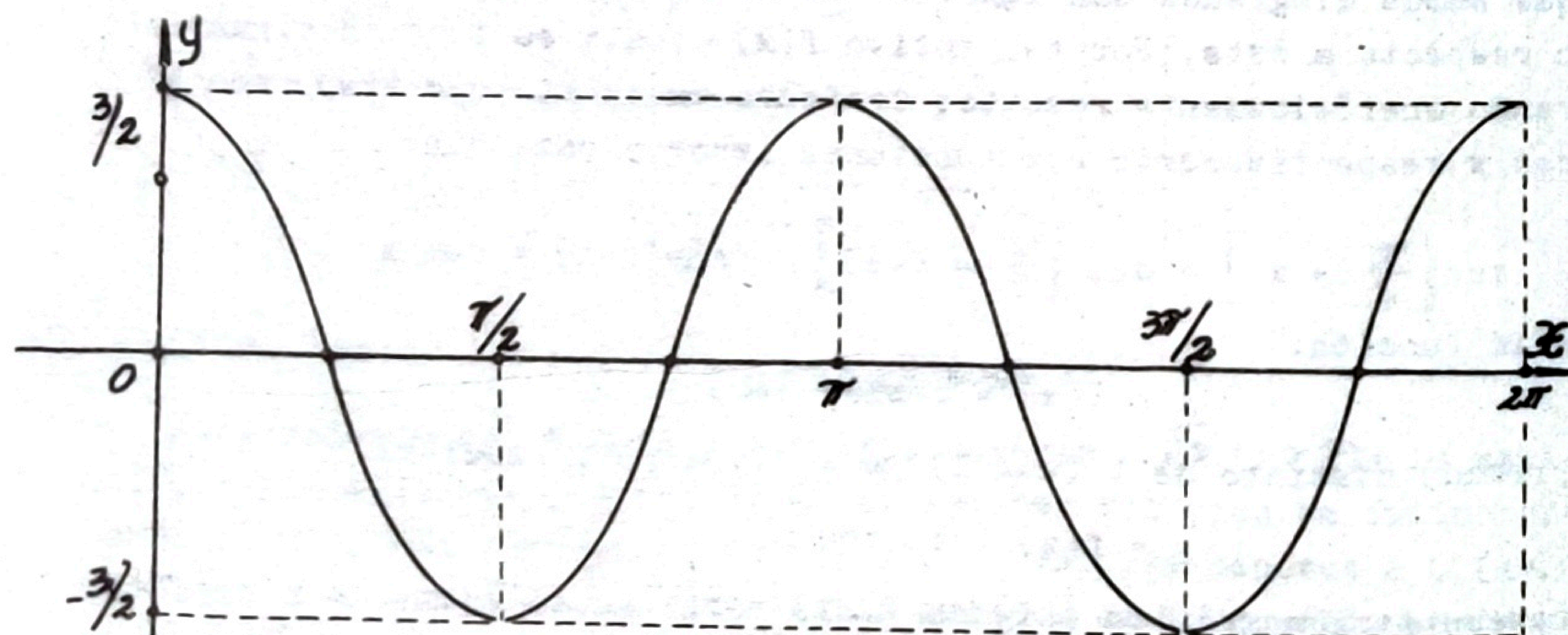
y resulta al hacer:

$$p = x - x' = \frac{2\pi}{\omega} - 0 = \frac{2\pi}{\omega}$$



- figura V.21 -

La representación gráfica (figura V.22) no sufre mayores modificaciones con respecto a la correspondiente de la figura anterior (figura V.21), dado que solo en el intervalo $(0 , 2\pi)$ resulta un mayor o menor número de ondas sinusoidales.-



- figura V.22 -

EJEMPLO: en la figura V.22, gráficamente se representó la función $f(x) = \frac{3}{2} \cos 2x$, y resultando $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$, en 2π hay 2 ondas.-

También ahora se induce que: cuando la pulsación es un entero, indica el número de ondas que f(x) tiene en cada intervalo de longitud 2π.-

Finalmente: si $k \neq 1; \omega > 0$ y $\neq 0$ (amplitud), se obtiene la expresión general:

$$y = f(x) = k \cdot \cos(\omega x + \alpha)$$

Su período p primitivo también es $\frac{2\pi}{\omega}$ porque:

$$f\left[x + \frac{2\pi}{\omega}\right] = k \cdot \cos\left[\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = k \cdot \cos(\omega x + \alpha) = f(x)$$

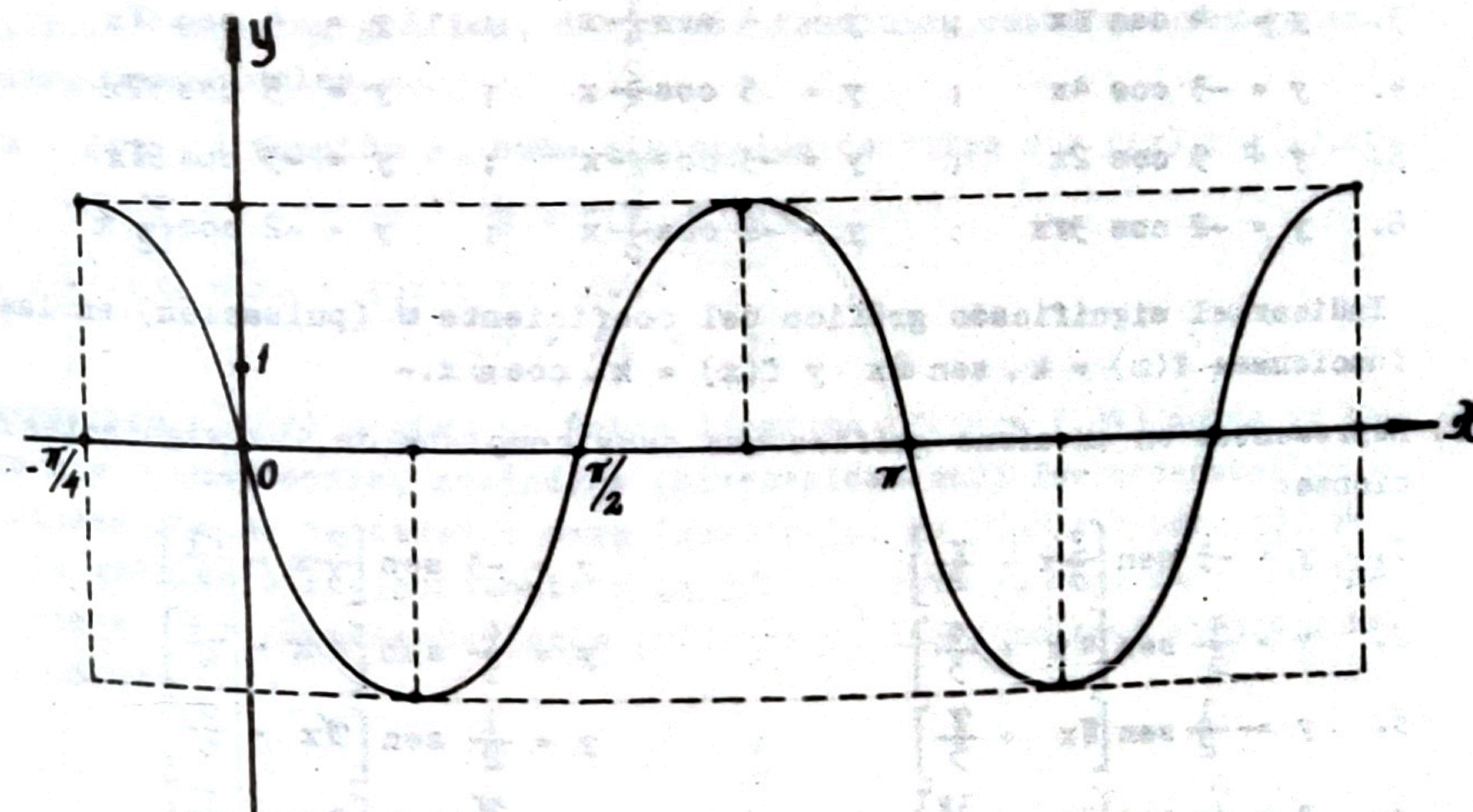
y resulta al hacer:

$$p = x - x' = \frac{2\pi - \alpha}{\omega} - \left[-\frac{\alpha}{\omega}\right] = \frac{2\pi - \alpha + \alpha}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

La representación gráfica (figura V.23) tampoco sufre mayores modificaciones con respecto a la función considerada anteriormente (figura V.22). La diferencia consiste en que la onda no comienza en el origen sino en el punto $P(-\frac{\alpha}{\omega}, 0)$ debido al valor de la constante α.-

El valor $\delta = -\frac{\alpha}{\omega}$, también se llama defasaje o corrimiento inicial y, siendo generalmente negativo, se obtiene como se indicara en la página 122.

EJEMPLO: en la figura V.23, se ha representado gráficamente la función $y = f(x) = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{2})$, resultando $p = \pi$ y $\delta = -\frac{\pi}{4}$.-



- figura V.23 -

El procedimiento seguido en el estudio del trazado de la función $y = f(x) = k \cdot \text{sen}(\omega x + \alpha)$ también se adapta para la función $y = f(x) = k \cdot \cos(\omega x + \alpha)$ -ver página 125-. Siguiendo el mismo, se ha efectuado el trazado de la gráfica en la figura V.23.-

De cuanto se ha dicho se infiere que es obvio reseñar la similitud que existe entre las funciones $f(x) = k \cdot \text{sen}(\omega x + \alpha)$ y $f(x) = k \cdot \cos(\omega x + \alpha)$.-

EJERCICIOS: a) Representar en el intervalo $(0 , 2\pi)$ en un mismo gráfico la función $f(x) = \text{sen } x$ y su recíproca $f(x) = \cos x$.-

b) Representar en un mismo gráfico una onda completa de las siguientes funciones:

1. $y = 2 \text{ sen } x$; $y = \frac{11}{3} \text{ sen } x$; $y = -6 \text{ sen } x$
2. $y = 3 \text{ sen } x$; $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$; $y = -2 \text{ sen } x$

3. $y = \frac{2}{5}$ sen x ; $y = 4$ sen x ; $y = -3$ sen x
4. $y = \frac{3}{7}$ sen x ; $y = 6$ sen x ; $y = -4$ sen x
5. $y = \frac{4}{5}$ cos x ; $y = 5$ cos x ; $y = -2$ cos x
6. $y = 4$ cos x ; $y = \frac{3}{4}$ cos x ; $y = -5$ cos x
7. $y = 7$ cos x ; $y = \frac{21}{4}$ cos x ; $y = -6$ cos x
8. $y = 0{,}4$ cos x ; $y =$ cos x ; $y = -$ cos x

Indicar el significado gráfico del coeficiente k (amplitud) en las funciones f(x) = k. sen x y f(x) = k. cos x.-

c) Representar en un mismo gráfico una onda completa de las siguientes funciones:

1. $y = -2 \text{ sen } 3x$; $y = -2 \text{ sen} \frac{2}{3} x$; $y = -2 \text{ sen } 6x$
2. $y = 3 \text{ sen } 2x$; $y = 3 \text{ sen} \frac{1}{4} x$; $y = 3 \text{ sen } 5x$
3. $y = 4 \text{ sen } \pi x$; $y = 4 \text{ sen} \frac{\pi}{4} x$; $y = 4 \text{ sen } 3\pi x$
4. $y = -3 \cos 4x$; $y = 5 \cos \frac{2}{5} x$; $y = 5 \cos 5\pi x$
5. $y = 5 \cos 2x$; $y = -3 \cos \frac{1}{3} x$; $y = -3 \cos 8\pi x$
6. $y = -2 \cos 3\pi x$; $y = -2 \cos \frac{\pi}{3} x$; $y = -2 \cos \frac{\pi}{12} x$

Indicar el significado gráfico del coeficiente ω (pulsación) en las funciones: f(x) = k . sen ωx y f(x) = k . cos ωx.-

d) Representar en un mismo gráfico una onda completa de las siguientes funciones:

1. $y = -3 \text{ sen}\left[\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right]$; $y = -3 \text{ sen}\left[\frac{2}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right]$
2. $y = \frac{4}{5} \text{ sen}\left[4x + \frac{\pi}{3}\right]$; $y = \frac{4}{5} \text{ sen}\left[4x - \frac{5\pi}{4}\right]$
3. $y = -\frac{1}{2} \text{ sen}\left[\pi x + \frac{\pi}{5}\right]$; $y = \frac{1}{2} \text{ sen}\left[\pi x - \frac{\pi}{6}\right]$
4. $y = \frac{7}{2} \cos\left[2x + \frac{3\pi}{4}\right]$; $y = \frac{\pi}{2} \cos\left[2x - \frac{\pi}{3}\right]$
5. $y = \frac{3}{4} \cos\left[2\pi x + \frac{\pi}{6}\right]$; $y = \frac{3}{4} \cos\left[2\pi x - \frac{\pi}{2}\right]$
6. $y = -2 \cos\left[\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right]$; $y = -2 \cos\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{5}\right]$

Indicar el significado gráfico del coeficiente α (fase inicial) en las funciones: f(x) = k . sen(ωx + α) y f(x) = k . cos(ωx + α).-

e) Representar en un mismo gráfico el espacio, la velocidad y la aceleración en función del tiempo de una partícula que efectúa un movimiento vibratorio armónico de t ciclos por segundo, sabiendo que su ecuación, respectivamente:

$s = f(t) = s_{max} \text{ sen } 2\pi ft$; $v = v_{max} \cos 2\pi ft$; $a = -a_{max} \text{ sen } 2\pi ft$

y que las relaciones entre los valores máximos son:

$v_{max} = 2\pi f . s_{max}$; $a_{max} = 2\pi f . v_{max}$

para los valores de f y s_{max} que se indican:

1. $f = 40 \text{ seg}^{-1}$; $s_{max} = 980$ M.
2. $f = 50 \text{ seg}^{-1}$; $s_{max} = 490$ M.
3. $f = 60 \text{ seg}^{-1}$; $s_{max} = 650$ M.
4. $f = 70 \text{ seg}^{-1}$; $s_{max} = 520$ M.
5. $f = 80 \text{ seg}^{-1}$; $s_{max} = 760$ M.
6. $f = 90 \text{ seg}^{-1}$; $s_{max} = 840$ M.

V.7.- <u>Sumas y productos de funciones efectuados en forma gráfica</u>.- Un procedimiento práctico, rápido e ingenioso permite sumar (algebraicamente) o multiplicar, en forma gráfica, dos o más funciones cualesquieras y, en particular, sinusoidales.-

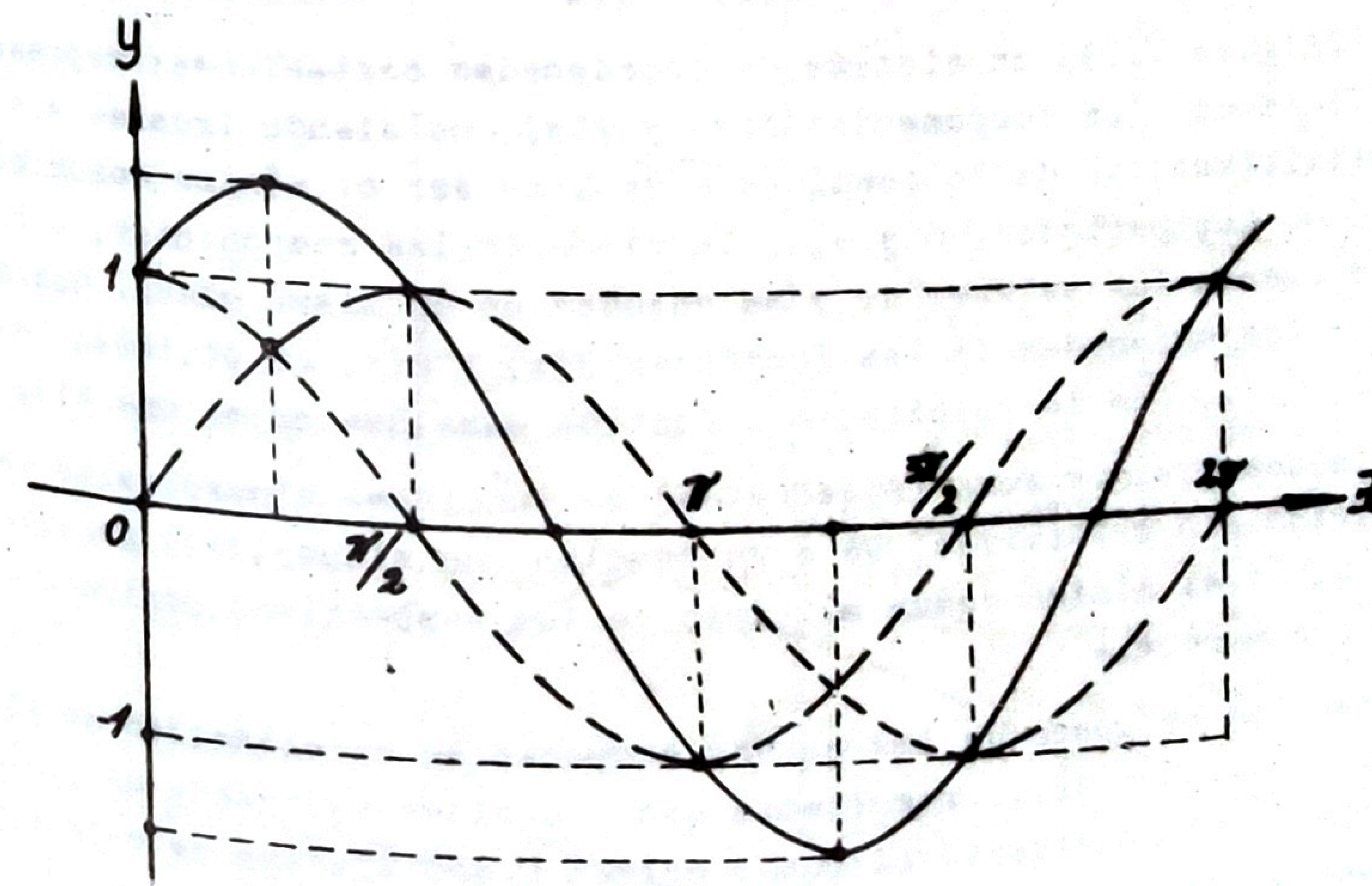
SUMA.- Dada la función y, suma algebraica de otras dos f(x) y g(x), es:

$$y = f(x) + g(x)$$

pero si $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$; resulta:

$$y = y_1 + y_2 \qquad (1)$$

Representadas f(x) y g(x) en único diagrama (figura V.24) donde se ha empleado una misma escala, sumándose (algebraicamente) las ordenadas de las funciones que se consideran para igual valor de abscisas por (1), se obtiene la gráfica correspondiente a la función suma y, cuya curva se llama resultante. Las representaciones gráficas de las funciones sumandos se llaman componentes.-



- figura V.24 -

A fin de obtener exactitud se aconseja el uso del compás para sumar (algebraicamente) las funciones sumandos y representadas las componentes se aconseja efectuar la suma (algebraica) gráfica en las raíces y puntos de amplitud máxima.-

Si se trata de una resta o diferencia de funciones se aconseja representar gráficamente la función sustraendo cambiada de signo y luego sumarla a la función minuendo, porque si:

$$y = f(x) - g(x)$$

es:

$$y = f(x) + - g(x) = y_1 + (-y_2)$$

EJEMPLOS: a) Sea la expresión.

$$y = \text{sen } x + \cos x$$

Sea (figura V.24) un sistema de coordenadas cartesianas; representemos gráficamente las componentes f(x) y g(x); siendo sus períodos p primitivos iguales ($p = 2\pi$), sumando gráficamente las ordenadas se obtienen los puntos A, B, C, ... de la función resultante, que también es una sinusoide.-

Se induce que: la suma (algebraica) de funciones sinusoidales del mismo período p primitivo es otra función sinusoidal de igual período que las dadas.-

b) Sea la expresión:

$$y = 2 \cos\left[\frac{\pi}{3} x - \frac{\pi}{3}\right] - 3 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{2}\right]$$

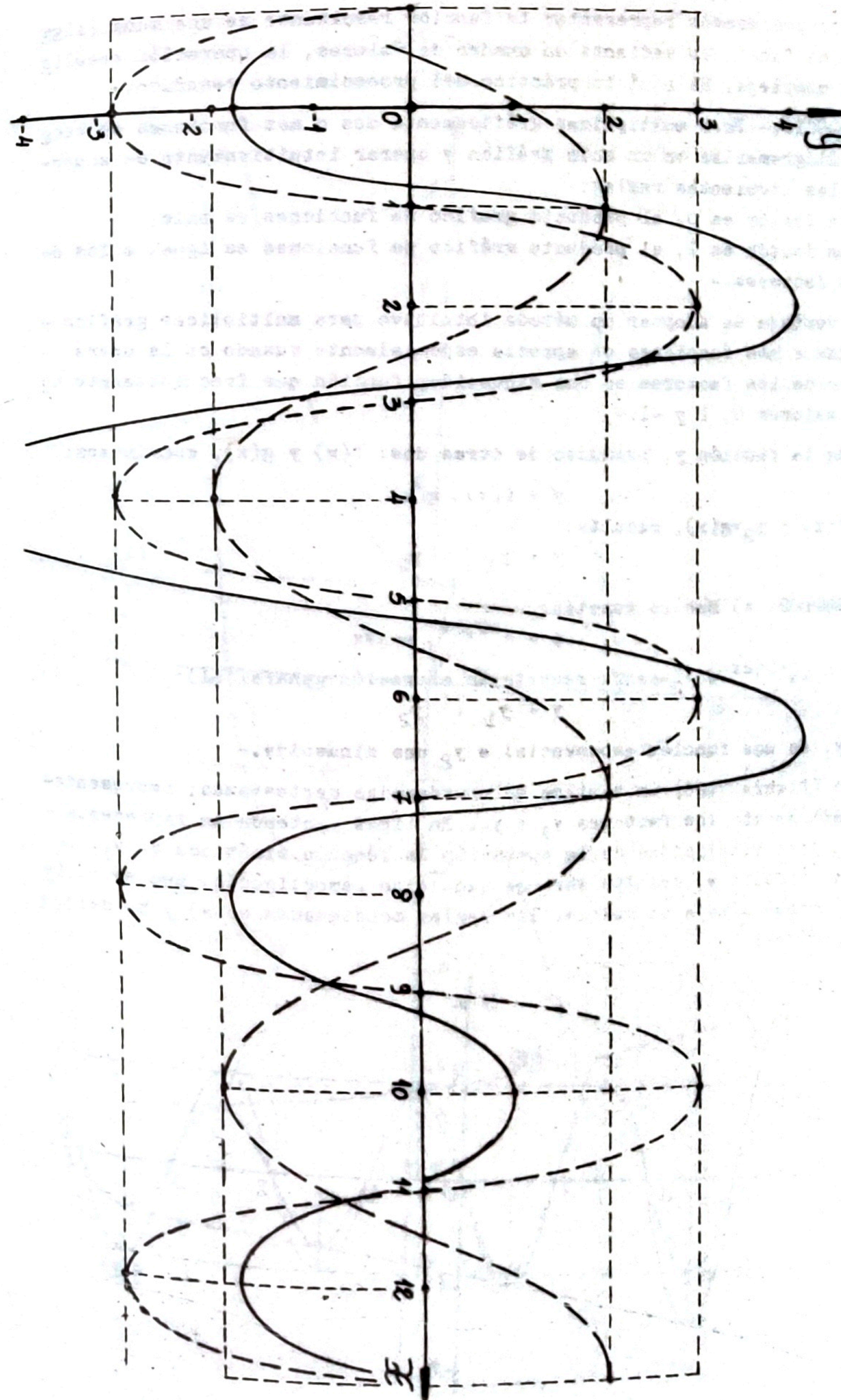
siendo $f(x) = 2 \cos\left[\frac{\pi}{3} x - \frac{\pi}{3}\right]$, resulta $k_f = 2$; $p_f = 6$; $\delta_f = 1$; en tanto que si $g(x) = 3 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{2}\right]$, resulta $k_g = 3$; $p_g = 4$; $\delta_g = -1$:

$$y = f(x) + g(x)$$

Sea (figura V.25) un sistema de coordenadas cartesianas; representemos gráficamente las componentes f(x) y g(x); no siendo iguales sus períodos p primitivos, el de la resultante resulta ser el mínimo común múltiplo (12) de los períodos, 6 y 4, primitivos de las componentes, porque es entonces cuando los valores de y se suceden en un mismo orden. Sumando gráficamente las ordenadas de las funciones f(x) y g(x) se obtienen los puntos A, B, C, ... de la resultante o función suma, que no es una sinusoide.-

Se induce que: la suma (algebraica) de funciones sinusoidales de distintos períodos p primitivos, es otra función (no sinusoidal) periódica cuyo período es el mínimo común múltiplo de los respectivos períodos de las funciones sumandos.-

Cuando los orígenes de las curvas componentes no coinciden en igual abscisa, el período de la resultante debe considerarse desde un punto cualquiera. Es usual considerar al punto origen O del sistema de referencia como origen del período considerado.-



- figura V.25 -

Si propusiéramos representar la función resultante de una suma (algebraica) de funciones mediante un cuadro de valores, la operación resultaría muy compleja. He aquí lo práctico del procedimiento reseñado.-

PRODUCTO.- Para multiplicar gráficamente dos o más funciones se recomienda diagramarlas en un solo gráfico y operar intuitivamente de acuerdo con las siguientes reglas:

a) si un factor es 0, el producto gráfico de funciones es nulo;
b) si un factor es 1, el producto gráfico de funciones es igual a los otros factores.-

La ventaja de adoptar un método intuitivo para multiplicar gráficamente dos o más funciones se aprecia especialmente cuando en la operación uno de los factores es una sinusoide, función que frecuentemente toma los valores 0, 1 y -1.-

Dada la función y, producto de otras dos: f(x) y g(x), escribimos:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

si $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$, resulta:

$$y = y_1 \cdot y_2 \qquad (1)$$

EJEMPLOS: a) Sea la función:

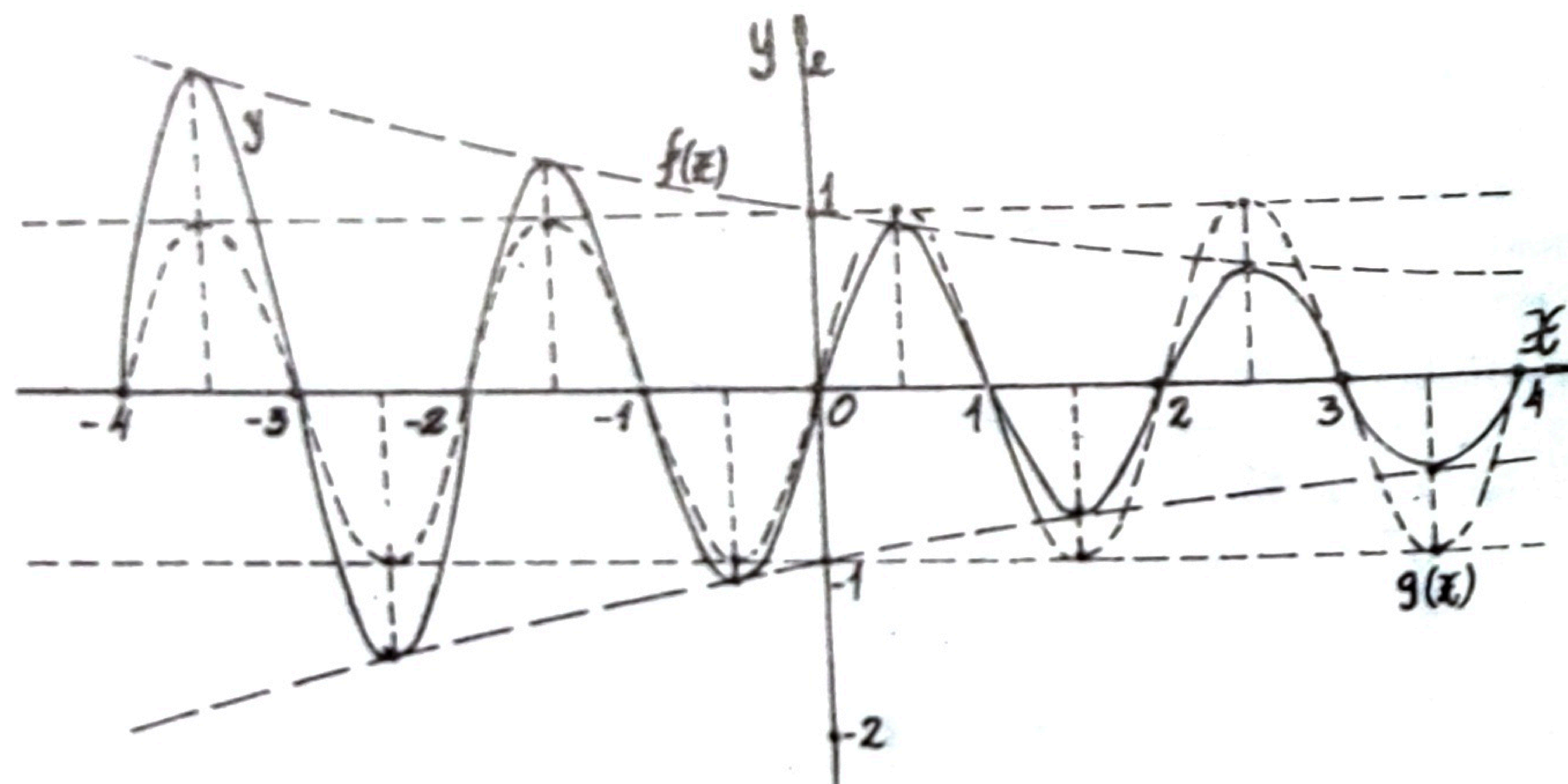
$$y = e^{-0,2x} \cdot \operatorname{sen} \pi x$$

siendo $y_1 = e^{-0,2x}$ e $y_2 = \operatorname{sen} \pi x$ resulta la expresión general (1):

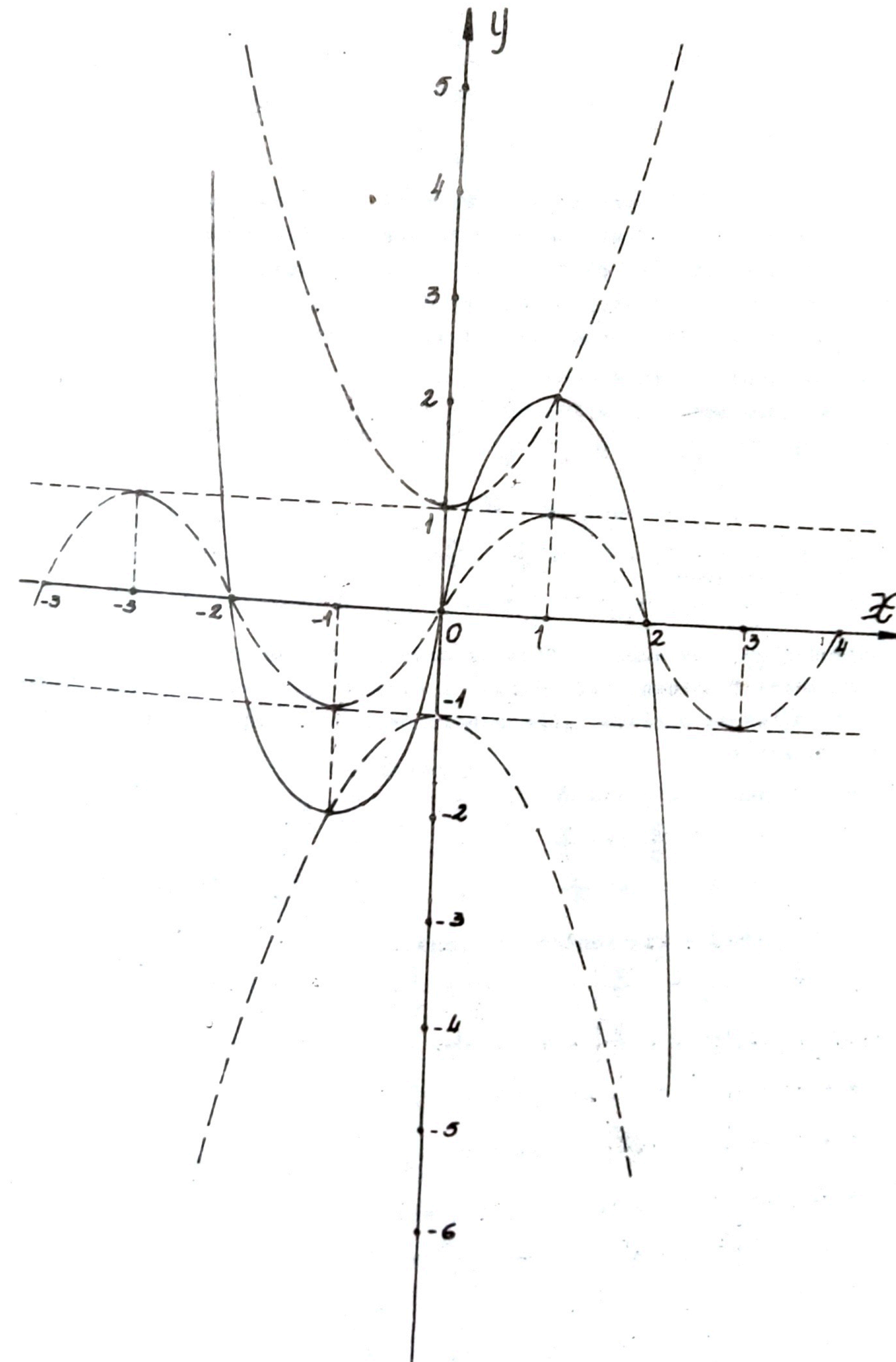
$$y = y_1 \cdot y_2$$

donde y_1 es una función exponencial e y_2 una sinusoide.-

Sea (figura V.26) un sistema de coordenadas cartesianas; representemos gráficamente los factores y_1 e y_2. En línea punteada se representa también para simplicidad de la operación la función simétrica de y_1. La función producto y, resulta ser una sinusoide (amortiguada) que se obtiene como consecuencia de aplicar las reglas consignadas en a) y b) del presente parágrafo.-



- figura V.26 -



Este tipo de funciones se presenta cuando se estudian los problemas de física donde existen amortiguamientos.-

La sinusoide amortiguada no es una función periódica pero existe un pseudo período que corresponde al período del factor y_2 sinusoidal.-

b) Sea la función:

$$y = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$$

siendo $y_1 = x^2 + 1$ e $y_2 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$ resulta la expresión general (1):

$$y = y_1 \cdot y_2$$

Sea (figura V.27) un sistema de coordenadas cartesianas; representemos gráficamente los factores y_1 e y_2. La función y_1 es una parábola; hallemos su simétrica (en el diagrama con línea punteada); la función y_2 es una sinusoide de período p primitivo 4. Se obtiene la función producto aplicando las reglas consignadas en a) y b) del presente parágrafo.-

EJERCICIOS: a) Representar, por suma gráfica de funciones y en los intervalos indicados, las siguientes funciones:

1. $y = 2^{0,3x} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{3} x + \frac{\pi}{5}\right]$ (-6 , 10)
2. $y = (x-1)^{\frac{2}{3}} - 3 \cos\left[\frac{\pi}{2} x - \frac{3\pi}{8}\right]$ (-8 , 8)
3. $y = 5 \log(x^2 - 1) + 2 \cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} x\right]$ (-5 , 7)
4. $y = 8\sqrt{3x + 2} - \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{4}\right]$ (-2 , 12)

b) Representar, por suma gráfica de ordenadas, una onda completa de las siguientes funciones períodicas, indicando el procedimiento empleado para hallar su período. ¿Qué condición deben cumplir los períodos de los sumandos?

1. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - 3 \cos \frac{x}{3}$;
2. $y = 5 \cos 3x - \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$;
3. $y = 2 \operatorname{sen} 4x + 6 \operatorname{sen} \frac{x}{4}$;
4. $y = 4 \cos 3x + \frac{4}{5} \cos \frac{2x}{3}$
5. $y = 5 \operatorname{sen} 2x + 2 \cos \frac{3x}{4}$
6. $y = \frac{1}{4} \cos 5x - 3 \cos \frac{x}{5}$

c) Idem b) para las siguientes funciones:

1. $y = \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left[\frac{2}{3} x - \frac{\pi}{3}\right] + 2 \cos\left[3x + \frac{\pi}{2}\right]$
2. $y = 2 \operatorname{sen}\left[\frac{3}{2} x + \frac{\pi}{5}\right] - 6 \cos\left[\frac{1}{3} x - \frac{2\pi}{3}\right]$
3. $y = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x - \pi) - 4 \operatorname{sen}\left[\frac{2}{5} x - \frac{\pi}{4}\right]$
4. $y = 3 \cos\left[\frac{1}{4} x + \frac{3\pi}{8}\right] - 4 \operatorname{sen}\left|5x - \frac{3\pi}{4}\right|$

d) Idem b) para las siguientes funciones:

1. $y = 5 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4} x - \frac{2\pi}{3}\right] + \frac{2}{3} \cos\left[\frac{5\pi}{6} x + \frac{\pi}{5}\right]$
2. $y = \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{2} x + \frac{\pi}{4}\right] + 6 \operatorname{sen}\left[\frac{5\pi}{3} x - \pi\right]$
3. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{5} x - \frac{\pi}{2}\right] - 4 \cos\left[\frac{3\pi}{5} x - \frac{\pi}{3}\right]$
4. $y = \frac{1}{\ }$ [illegible] $\frac{3\pi}{4}\Big] + 4 \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{2} x + \frac{\pi}{8}\right]$

e) En una red de conductores concurren en un nudo las corrientes alternadas I_1, I_2, I_3 e I_4 tales que:

$I_1 = A \operatorname{sen} 2\pi ft$; $I_2 = B \operatorname{sen} 2\pi ft$; $I_3 = C \operatorname{sen} 2\pi ft$

Siendo t el tiempo, medido en segundos, representar gráficamente en fracción de él los valores de las intensidades en cada una de las cuatro ramas del nudo durante $\frac{1}{10}$ de segundo.-

Empléese la primera ley de KIRCHOFF y los valores de las intensidades máximas A, B y C (Amp) y de la frecuencia f (seg^{-1}), respectivamente, que se dan a continuación:

1.	8 ; 3 ; 6 ; 20	3.	5 ; 6 ; 2 ; 22	5.	4 ; 2 ; 8 ; 12
2.	3 ; 4 ; 7 ; 15	4.	2 ; 5 ; 4 ; 25	6.	6 ; 8 ; 3 ; 18

f) Representar las siguientes funciones en los intervalos indicados, descomponiéndolas en dos factores y deduciendo su gráfica de las de ellos:

1. $y = (x - 5)^2 \cos \frac{\pi}{2} x$ (-1 , 7)
2. $y = \left[3 - \frac{x^3}{200}\right] \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x$ (-3 ,10)
3. $y = \left[\frac{x^2}{8} - 1\right] \cos \frac{2\pi}{3} x$ (-4 , 6)
4. $y = \left[\frac{x+2}{5}\right]^3 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} x$ (-5 , 5)
5. $y = (x + 8)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{4} x$ (-8 , 8)

g) Idem f) para las siguientes funciones:

1. $y = e^{-0,8x} \cos\left[\frac{3\pi}{2} x - \frac{\pi}{4}\right]$ (-3 , 3)
2. $y = e^{-0,06x} \cos\left[\frac{\pi}{8} x + \frac{\pi}{6}\right]$ (-50,50)
3. $y = e^{0,3x} \cos\left[\frac{4\pi}{5} x - \frac{\pi}{8}\right]$ (-9 , 9)
4. $y = e^{0,6x} \operatorname{sen}\left[\frac{5\pi}{2} x + \frac{\pi}{6}\right]$ (-4 , 4)
5. $y = e^{-0,2x} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{5} x - \frac{\pi}{3}\right]$ (-15,15)
6. $y = e^{0,25x} \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{5} x + \frac{\pi}{5}\right]$ (-10,10)

h) Idem f) para las siguientes funciones:

1. $y = \log (x - \pi)^2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ (-6π, 6π)
2. $y = \log \frac{x^2 - \pi^2}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{3}$ (-8π, 8π)
3. $y = \log \frac{\pi^2 - x^2}{2} \cos 4x$ (-2π, 2π)

i) La intensidad de una corriente eléctrica en un circuito está dada por $I = 50 \operatorname{sen} 628\, t$ (Amp) y el voltaje por $E = 148 \operatorname{sen}(628\, t + 0,559)$ (V). La potencia es $W = I \cdot E$ (watts). Trazar las curvas representativas de I, E y W en el intervalo (0 , 0,1) para t variando cada 0,001.-

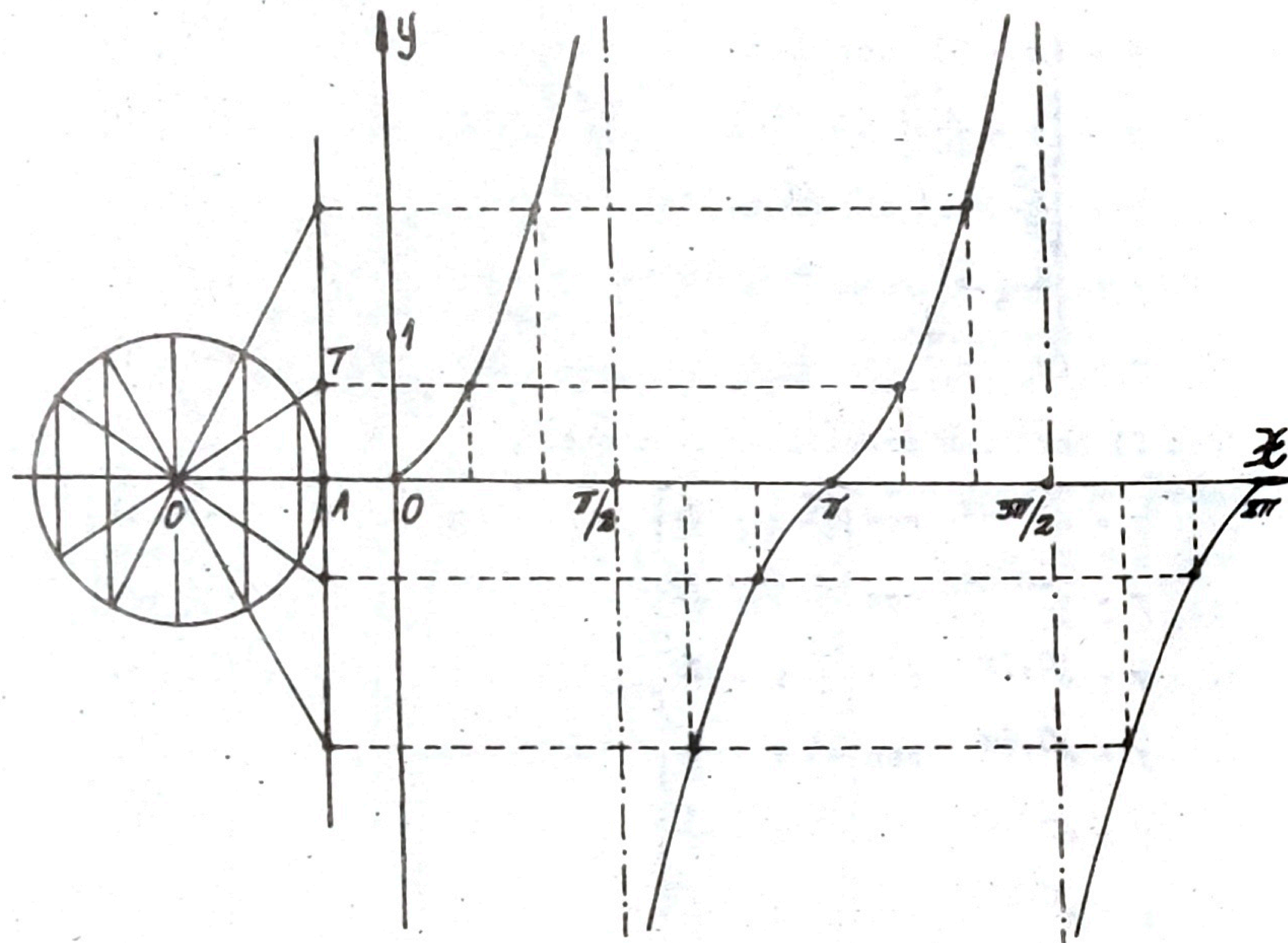
V.8.- **Funciones tipos: $f(x) = tg\ x$; $f(x) = ctg\ x$.-** Sea la función:

$$y = f(x) = tg\ x$$

Su intervalo de definición, dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty\ [\infty, \infty]$, es infinito y abierto. Como a valores opuestos de la variable independiente x corresponden también valores opuestos para f(x), la función es impar: $f(-x) = -f(x)$.-

Sea (figura V.28) la circunferencia unidad y un ángulo x variable, cuya medida $\overline{AT}$ geométricamente representa la función tg x.-

En el primer cuadrante $(0, \frac{\pi}{2})$, la medida de $\overline{AT}$ = tg x varía desde 0 hasta $+\infty$ pasando por todos los valores intermedios, al hacerlo el ángulo x variable; en el segundo cuadrante $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, lo hace desde $-\infty$ hasta 0, al variar x; en el tercer cuadrante $(\pi, \frac{3\pi}{4})$, $\overline{AT}$ = tg x vuelve a variar desde 0 hasta $+\infty$, al hacerlo el ángulo x variable; y finalmente: en el cuarto cuadrante $(\frac{3\pi}{4}, 2\pi)$, aquélla nuevamente varía desde $-\infty$ hasta 0 al hacerlo el ángulo x.-



- figura V.28 -

Para valores del ángulo x variable mayores a 2π, o menores a 0 ($x > 2\pi$ ó $x < 0$) la medida de los correspondientes valores del segmento $\overline{AT}$ se suceden alternadamente entre $-\infty$ y $+\infty$ según corresponda. Por tal motivo la representación gráfica de la función f(x) = tg x se simplifica tomando los valores límites $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{4}$ de su ángulo variable.-

Llevando sobre un sistema de coordenadas cartesianas (figura V.28) los valores del ángulo x variable y sus correspondientes del segmento $\overline{AT}$ obtiénense puntos que unidos dan la gráfica de la función f(x)= tg x dada.

La función tg x es periódica siendo su período primitivo π

$$y = f(x) = tg\ (x + \pi) = tg\ (x + p) = tg\ x$$

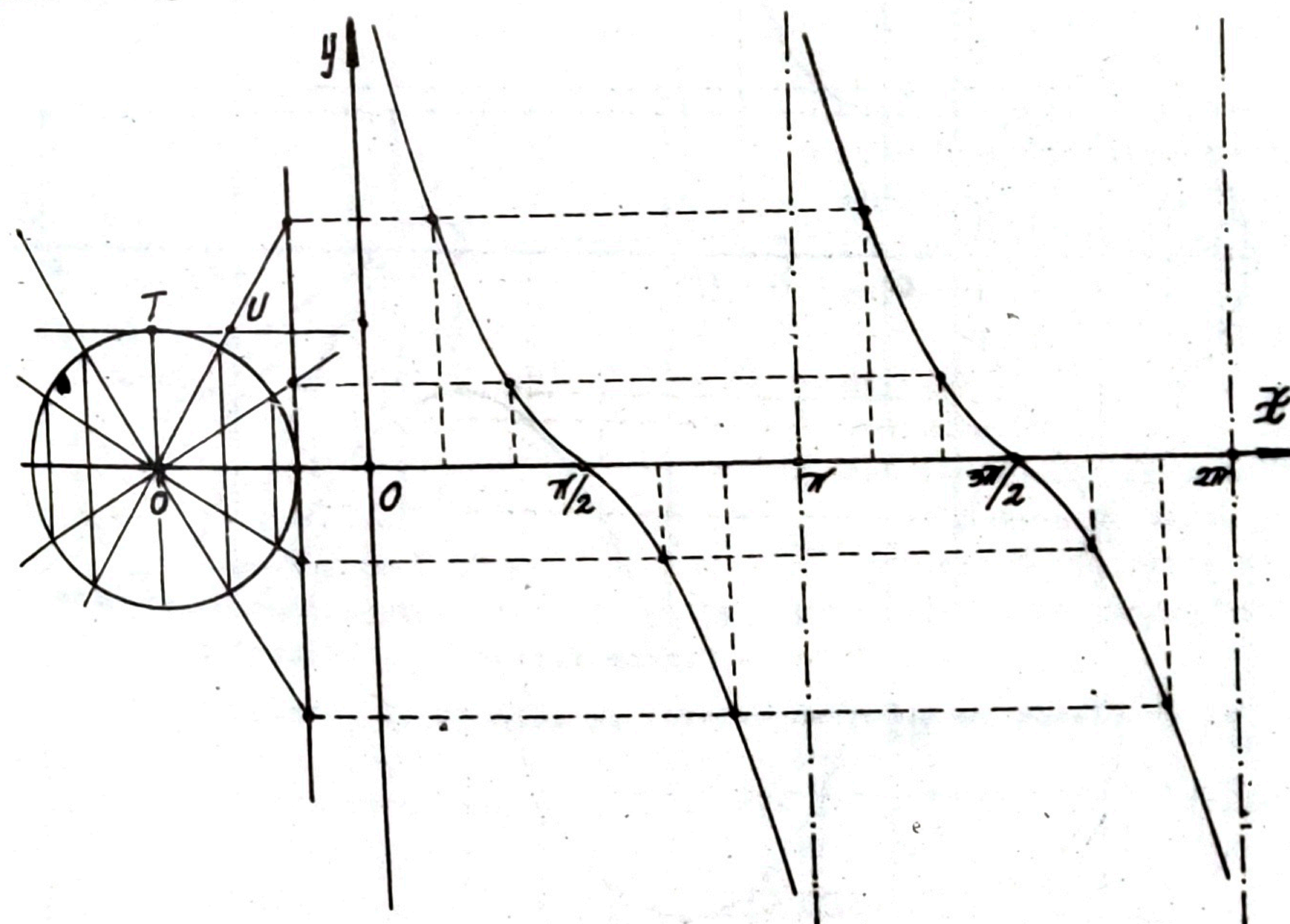
Sea la función:

$$y = f(x) = ctg\ x$$

Su intervalo de definición, dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty\ [-\infty, \infty]$, es también infinito y abierto.

Sea (figura V.29) la circunferencia unidad y un ángulo x variable, cuya medida $\overline{TU}$ geométricamente representa la función ctg. x.-

En el primer cuadrante $(0, \frac{\pi}{2})$, la medida de $\overline{TU}$ = ctg x varía desde $+\infty$ hasta 0 pasando por todos los valores intermedios, al hacerlo el ángulo x variable; en el segundo cuadrante $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, lo hace desde 0 hasta $-\infty$ al variar x; en el tercer cuadrante $(\pi, \frac{3\pi}{4})$, $\overline{TU}$= tg x vuelve a variar desde $+\infty$ hasta 0, al hacerlo el ángulo x variable; y finalmente: en el cuarto cuadrante $(\frac{3\pi}{4}, 2\pi)$, aquélla nuevamente varía desde 0 hasta $-\infty$ al hacerlo el ángulo x.-



- figura V.29 -

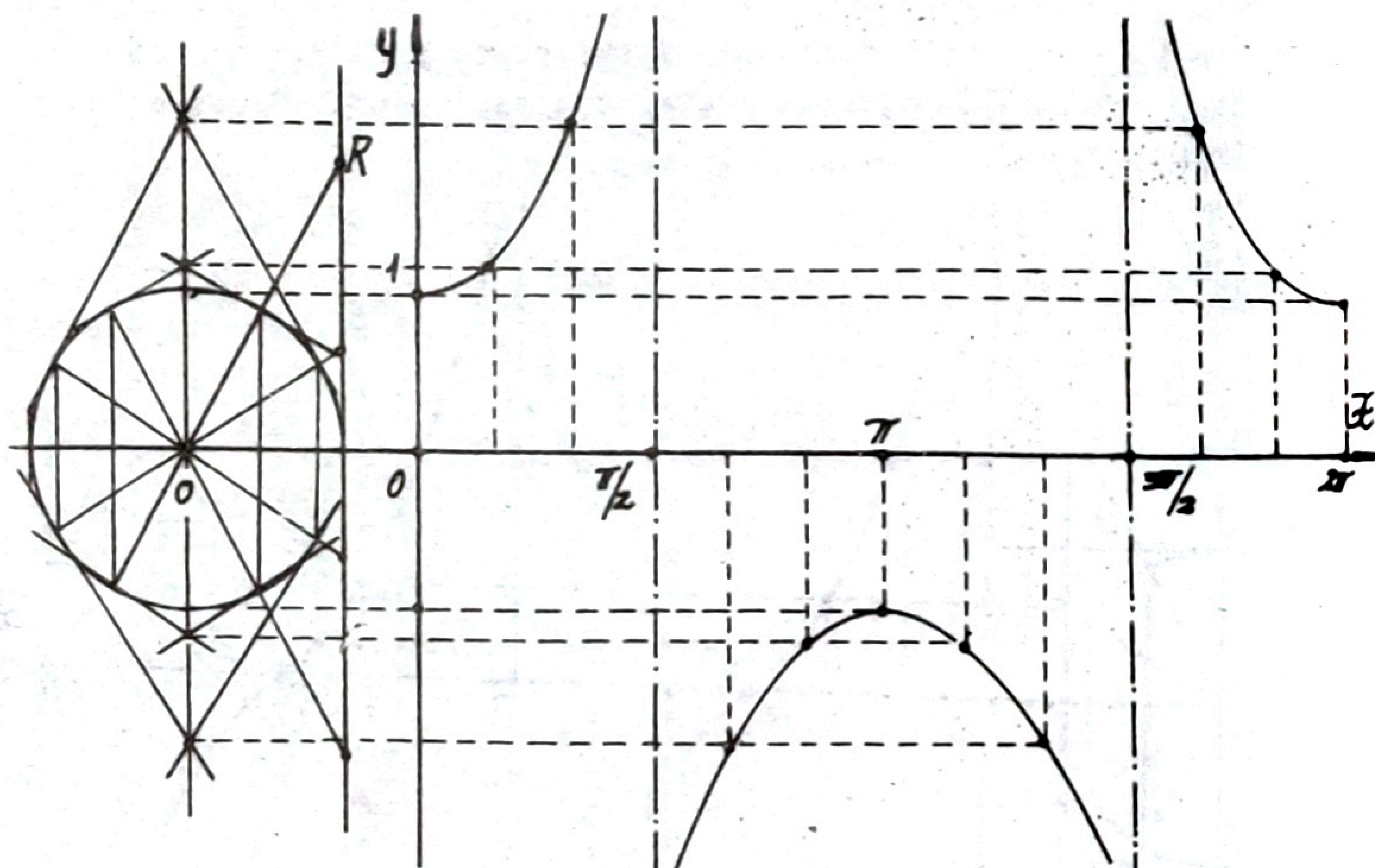
Para valores del ángulo x variable mayores a 2π, o menores a 0 ($x > 2\pi$ ó $x < 0$) la medida de los correspondientes valores del segmento $\overline{TU}$ se suceden alternadamente entre $+\infty$ y $-\infty$ según corresponda. Por tal motivo la representación gráfica de la función f(x) = ctg x se simplifica tomando los valores límites 0 y π de su ángulo x variable.-

Llevando sobre un sistema de coordenadas cartesianas (figura V.29) los valores del ángulo x variable y sus correspondientes del segmento $\overline{TU}$ obtiénense puntos que unidos dan la gráfica de f(x) = ctg x dada.-

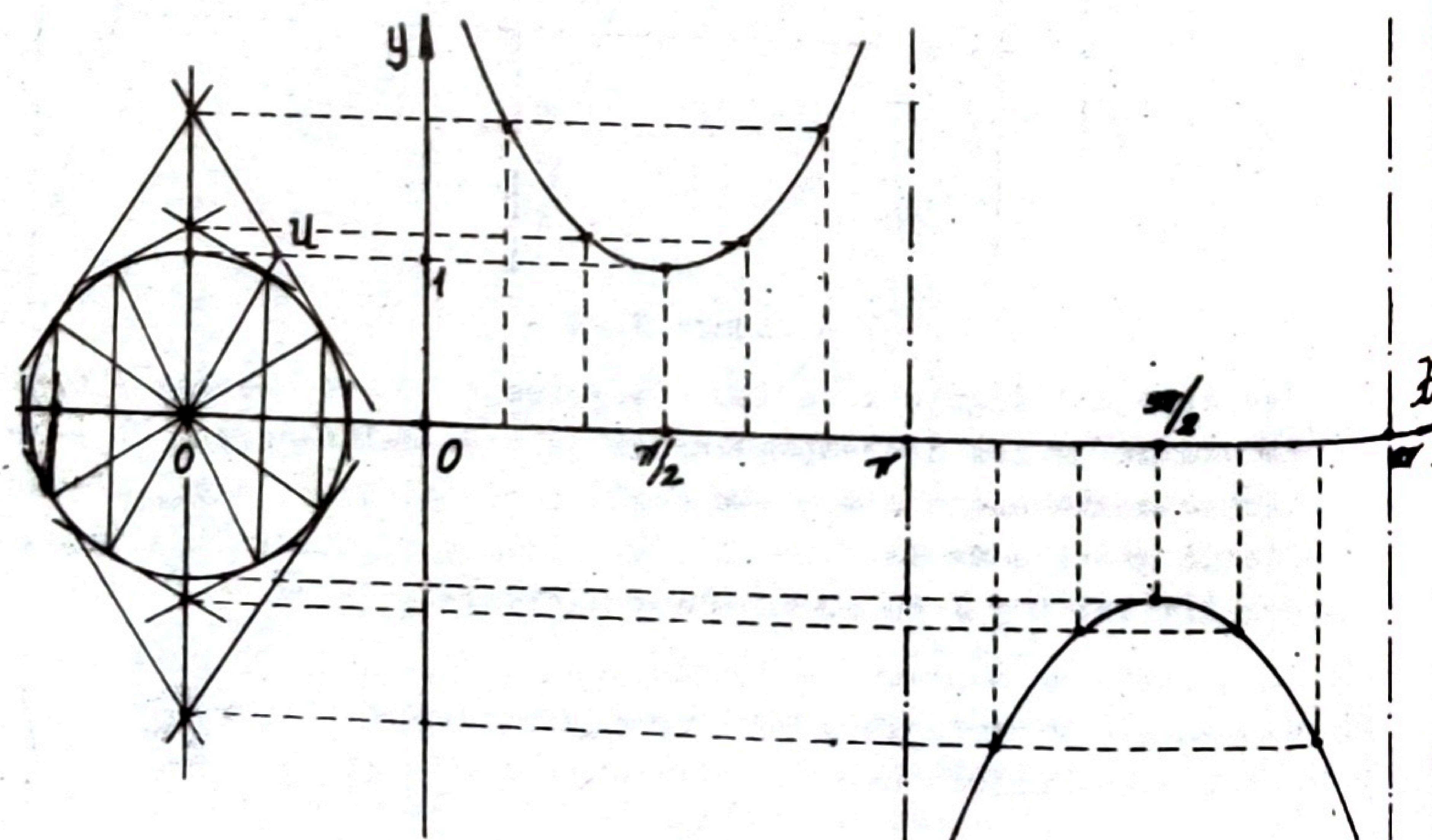
También f(x) = ctg x es función períodica de período p primitivo π.

V.9.- <u>Funciones tipos: f(x) = sec x ; f(x) = cosec x.-</u> Empleando un procedimiento idéntico al expresado en el parágrafo V.8 se obtienen las representaciones gráficas (figuras V.30 y 31) de las funciones f(x) = sec x y f(x) = cosec x. A tal efecto deben considerarse fijada la circunferencia unidad y el ángulo x variable la medida de los segmentos $\overline{OR}$ y $\overline{OU}$ que geométricamente representan las funciones sec x y cosec x, respectivamente.-

Las funciones sec x y cosec x son períodicas y 2π es su período.-



- figura V.3o -



- figura V.31 -

V.10.- <u>Funciones circulares inversas.-</u> La función y, inversa del seno, puesta en la forma:

$$x = f(y) = \text{sen } y \qquad (1)$$

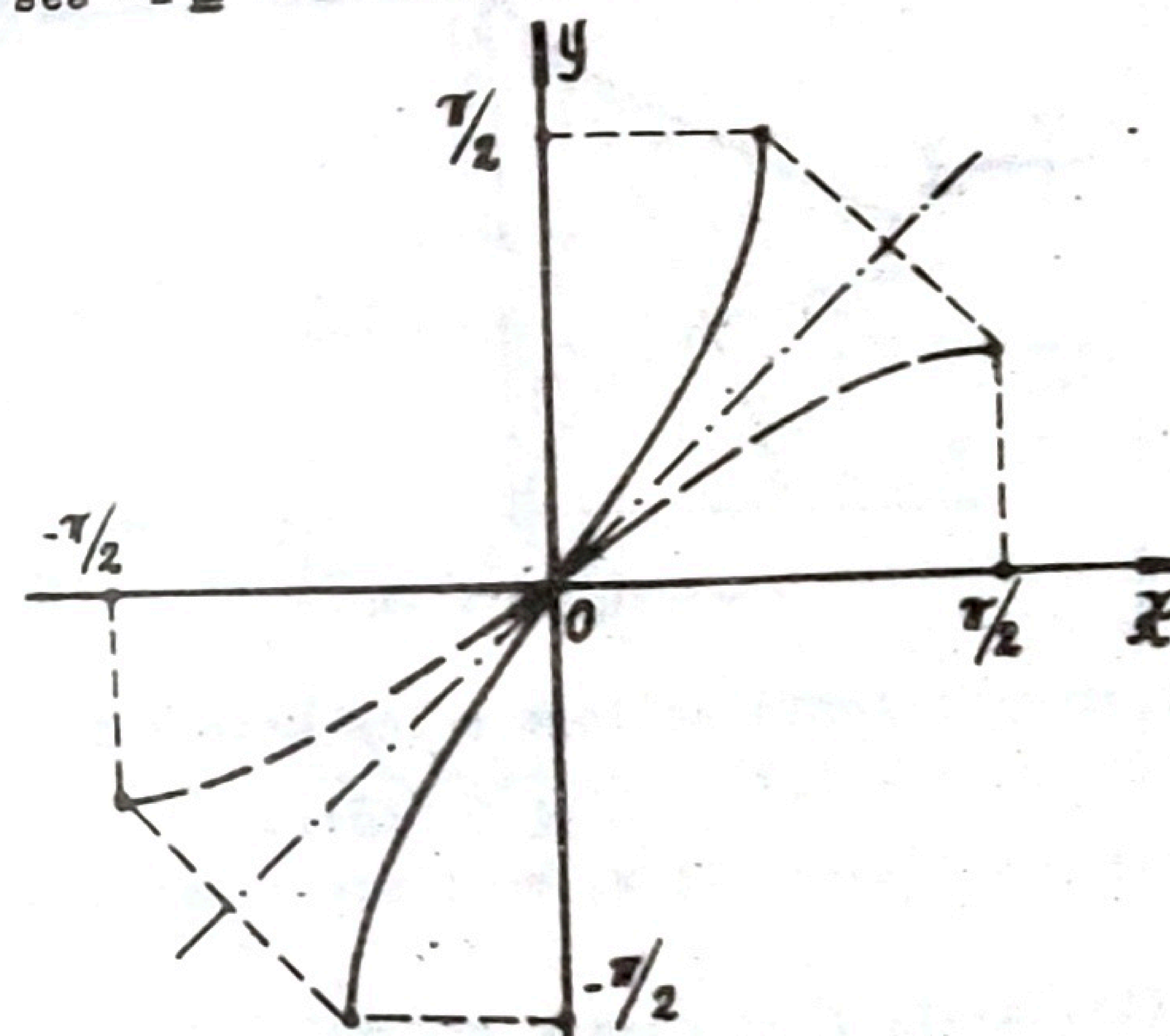
se llama función arco seno, de modo que la expresión (1) equivale a:

$$y = f(x) = \text{arc sen } x$$

Si bien en la expresión y = f(x) de las funciones circulares, a cada valor de x corresponde un solo valor de y, la proposición recíproca no es cierta. En efecto: por ejemplo a un valor $x = \frac{1}{2}$ corresponden infinitos arcos cuyo seno vale x ($\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi$; $\frac{5}{6}\pi \pm 2k\pi$, con k = 0; 1; 2 ; ...).-

La función y = f(x) = arc sen x está definida en el intervalo (-1 , 1), o sea $-1 \leq x \leq 1$, y es multiforme, admitiendo infinitos valores para cada valor de x donde esté definida. - Por eso para evitar esta ambigüedad definiremos y = f(x) = arc sen x en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, o sea $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, con lo que se obtiene el arco seno x como función uniforme. A esta determinación única del arco seno en el intervalo indicado se le llama valor principal.-

En el parágrafo V.3 (figura V.5) se ha explicado el procedimiento geométrico para obtener la función inversa de una función dada, tomando puntos simétricos de la recta y = x. Aplicando el procedimiento indicado, en la figura V.32 se ha representado gráficamente la función arco seno x.-



- figura V.32 -

Análogamente, la función y, inversa del coseno, puesta en la forma:

$$x = f(y) = \cos y \qquad (2)$$

se llama función arco coseno, de modo que la expresión (2) equivale a:

$$y = f(x) = \text{arc cos } x$$

La función y = f(x) = arc cos x, definida en el intervalo (-1 , 1), también es multiforme. De allí entonces que para obtener el arco coseno x como función uniforme lo definamos en el intervalo $(0 , \pi)$, o sea $0 \leq x \leq \pi$, resultando así su valor principal.-

De acuerdo al procedimiento indicado en el parágrafo V.3 (figura V.5) se ha representado gráficamente la función arco coseno x (figura V.33).-

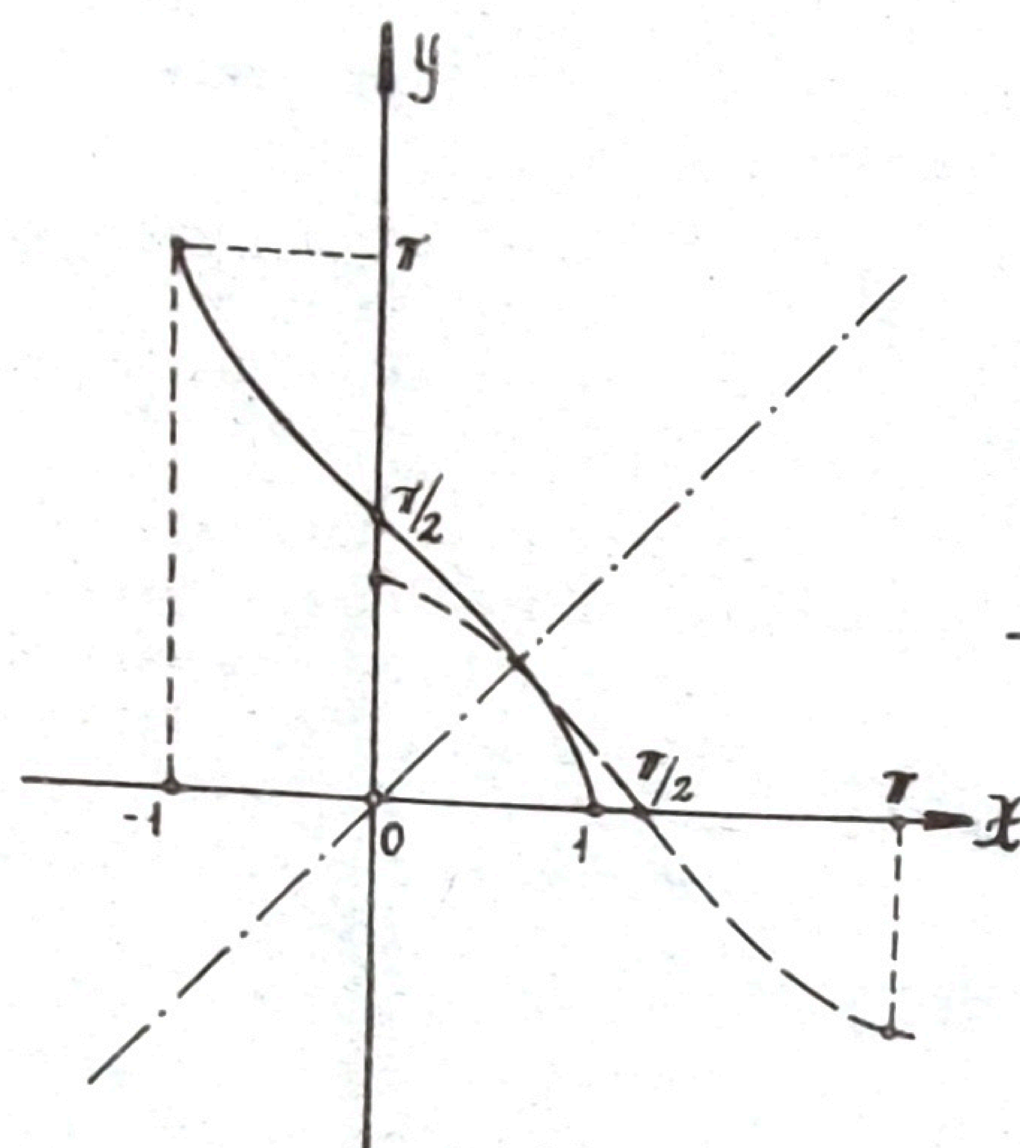
Análogamente, la función inversa de tg x, escrita en la forma:

$$x = f(y) = \text{tg } y \qquad (3)$$

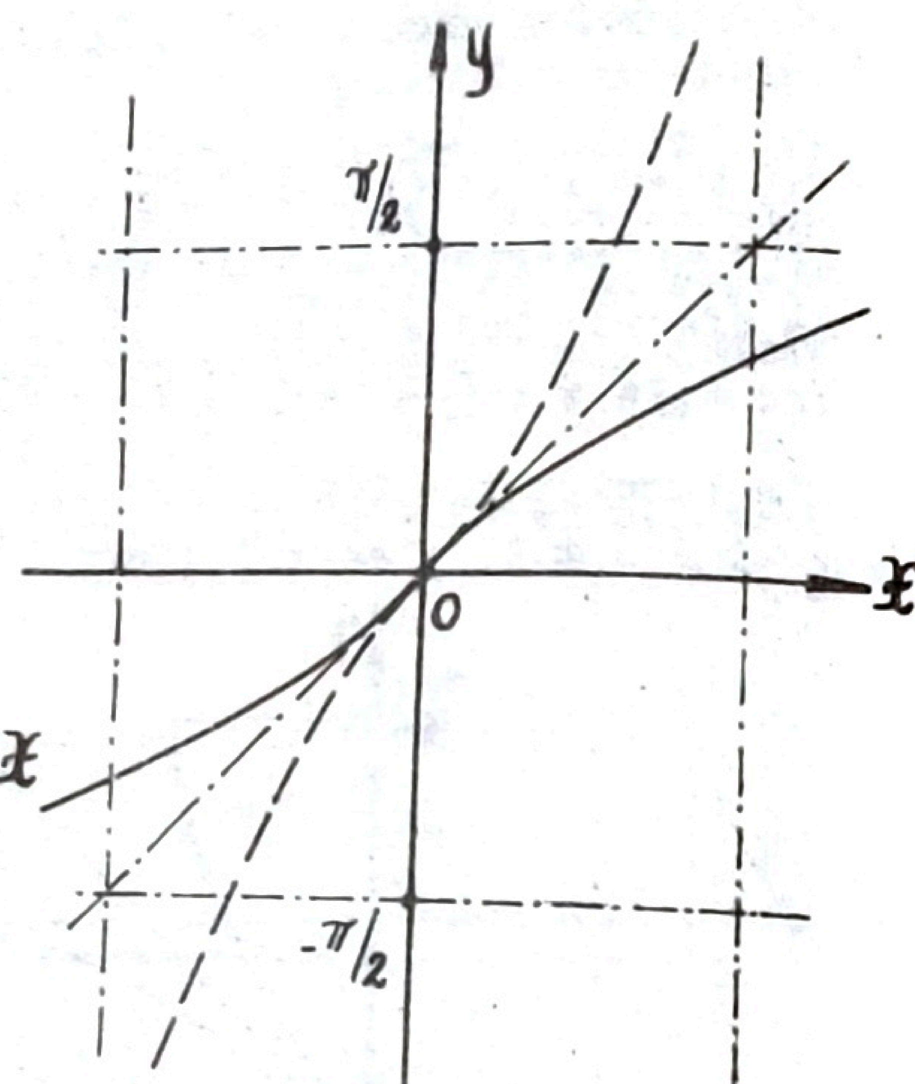
se le llama función arco tangente, resultando equivalente la expresión (3) a la siguiente:

$$y = f(x) = \text{arc tg } x$$

Como antes se ha procedido, impondremos la restricción de definir a la función $y = f(x) = \text{arc tg } x$ en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a fin de obtener entre sus infinitas determinaciones una función uniforme. Con ello se obtiene su valor principal.-



- figura V.33 -



- figura V.34 -

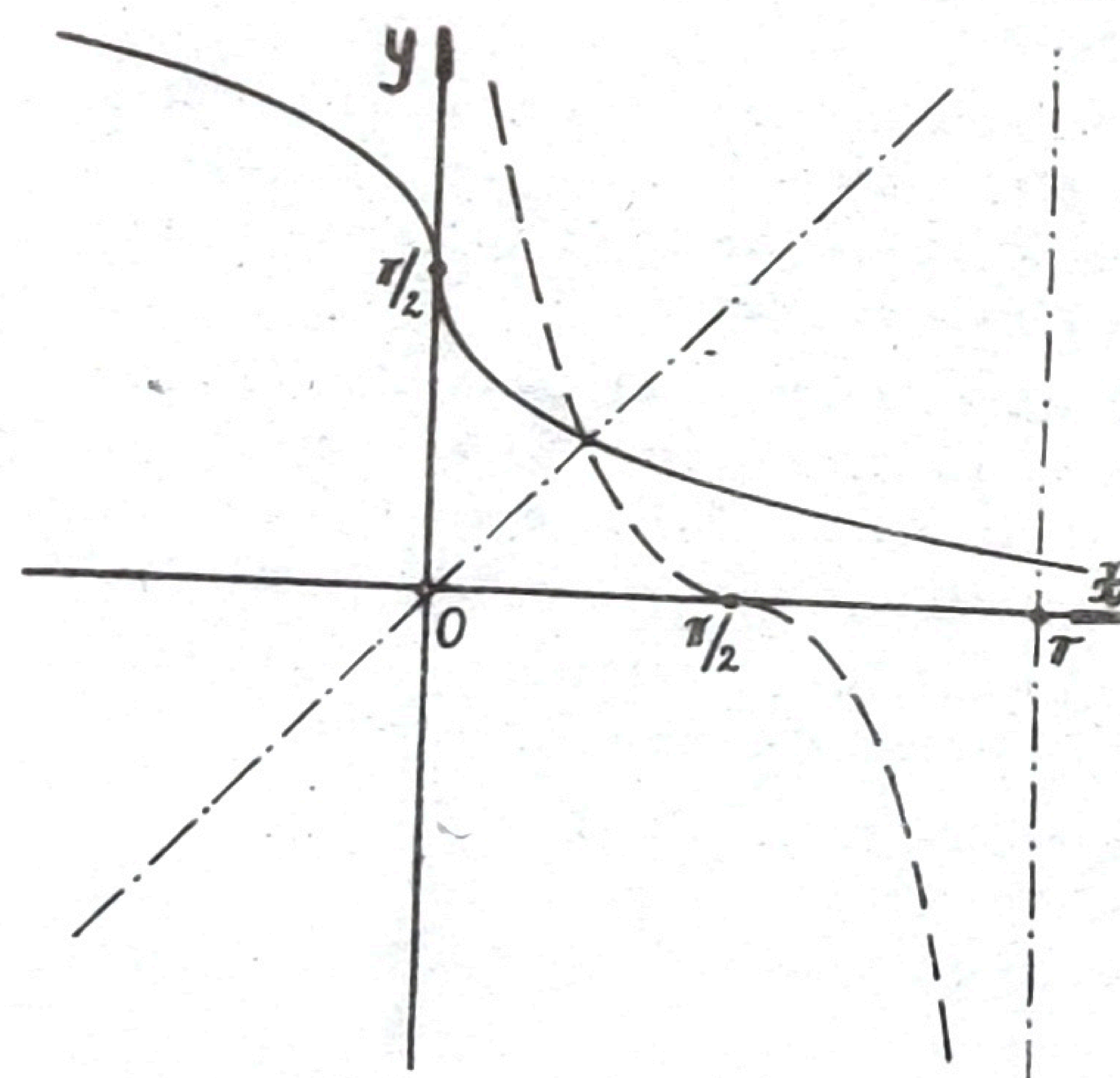
En la figura V.34 y mediante procedimiento análogo a los anteriores, se ha representado gráficamente la función $y = f(x) = \text{arc tg } x$.-

La función circular inversa de $y = f(x) = \text{ctg } x$, se llama función arco cotangente x:

$$x = f(y) = \text{ctg } y \qquad (4)$$

resultando la expresión (4) equivalente a:

$$y = f(x) = \text{arc ctg } x$$



- figura V.35 -

Para obtener una función uniforme, la definiremos en el intervalo $(0, \pi)$, obteniéndose así su valor principal. Su representación gráfica se aprecia en la figura V.35.-

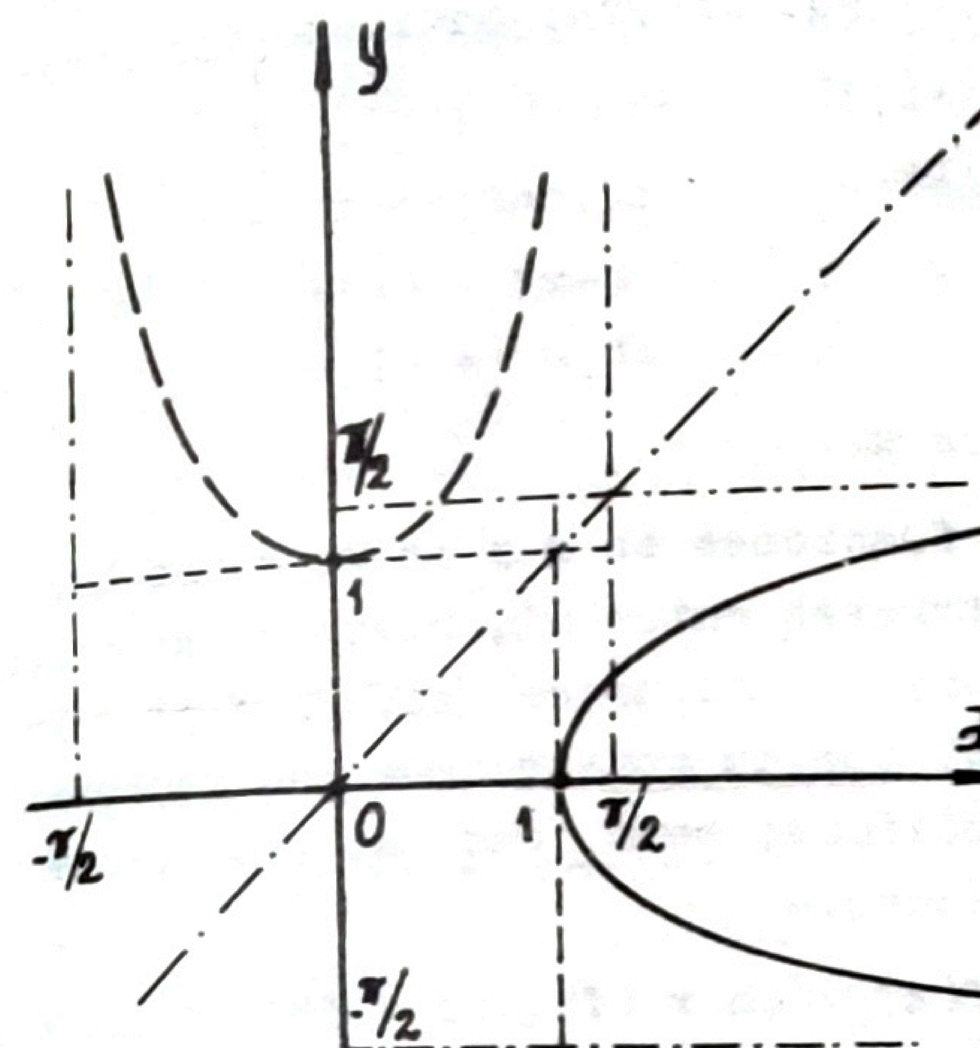
Finalmente las funciones inversas de la secante x y cosecante x, puestas en la forma:

$$x = f(y) = \sec y \qquad (5)$$
$$x = g(y) = \text{cosec } y \qquad (6)$$

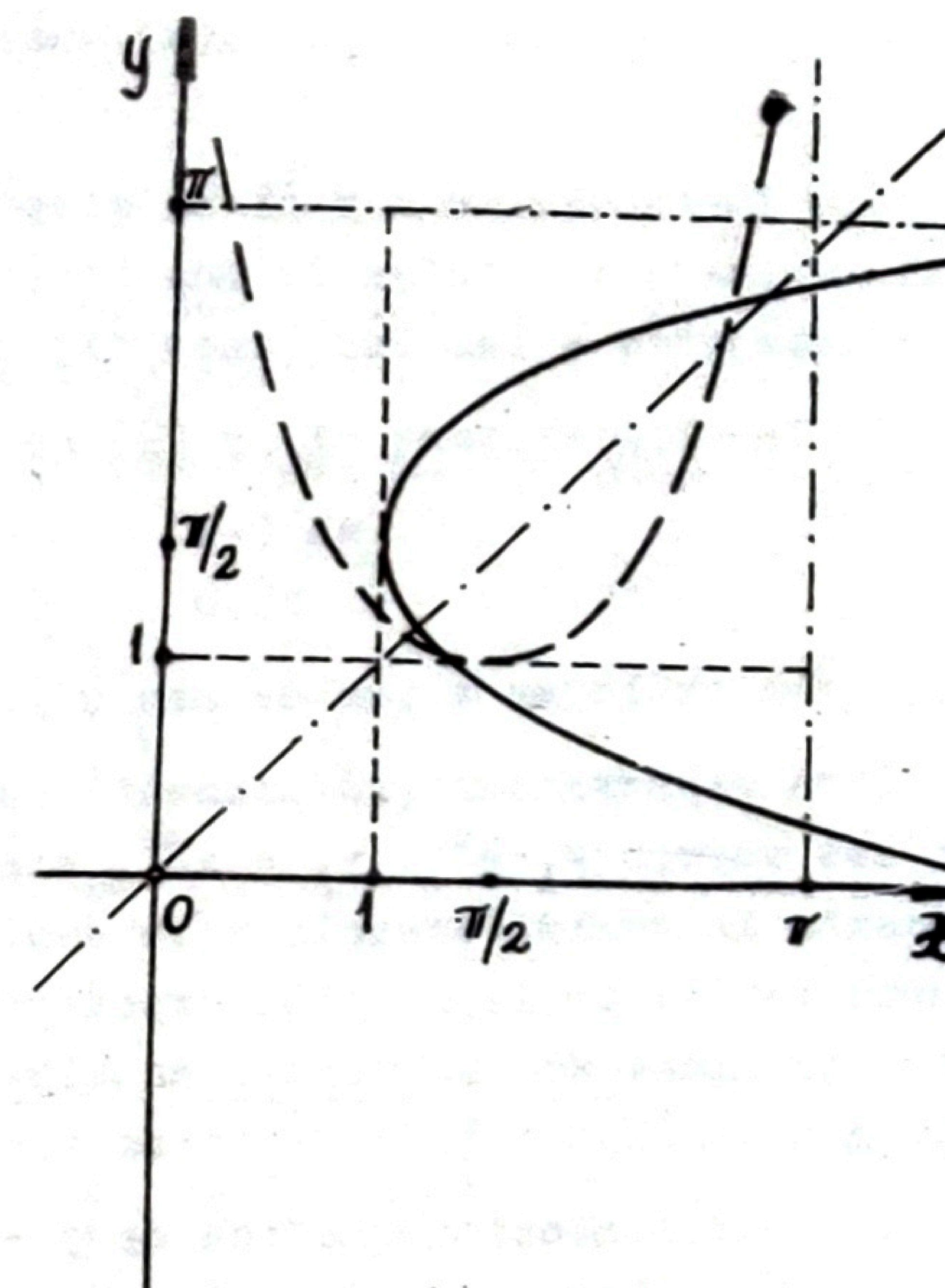
respectivamente se llaman arco-secante y arco cosecante, de modo que las expresiones (5) y (6) equivalen a:

$$y = f(x) = \text{arc sec } x$$
$$y = g(x) = \text{arc cosec } x$$

El valor principal de las funciones arco secante x y arco cosecante x, respectivamente está dado por los intervalos $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $(0, \pi)$, obteniéndose así funciones uniformes cuyas representaciones gráficas se aprecian en las figuras V.36 y V.37.-



- figura V.36 -



- figura V.37 -

V.11.- Funciones hiperbólicas: concepto.- Las funciones hiperbólicas se caracterizan por vincularse a la hipérbola mediante relaciones similares a las que existen entre las funciones trigonométricas y la circunferencia.- He aquí expresada la razón de su etimología. En su estructura, las funciones hiperbólicas son combinación de funciones exponenciales de base e.-

Sea una variable x; seno hiperbólico de x (sh x) es la función:

$$y = \text{sh } x = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (1)$$

en tanto que coseno hiperbólico de x (ch x) es la función:

$$y = \text{ch } x = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (2)$$

La tangente (th x) y cotangente (cth x) hiperbólicas, se definen a partir del sh x y ch x. En efecto:

$$y = f(x) = \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = f(y) = \text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

La secante (sch x) y cosecante (csch x) hiperbólicas, a su vez, se definen como funciones recíprocas de ch x y sh x respectivamente.- En efecto:

$$y = f(x) = \text{sch } x = \frac{1}{\text{ch } x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$y = f(x) = \text{csch } x = \frac{1}{\text{sh } x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

Las funciones sh x y ch x, respectivamente representan geométricamente la ordenada y abscisa de una hipérbola equilátera, pudiendo definirse en forma semejante a las funciones circulares.-

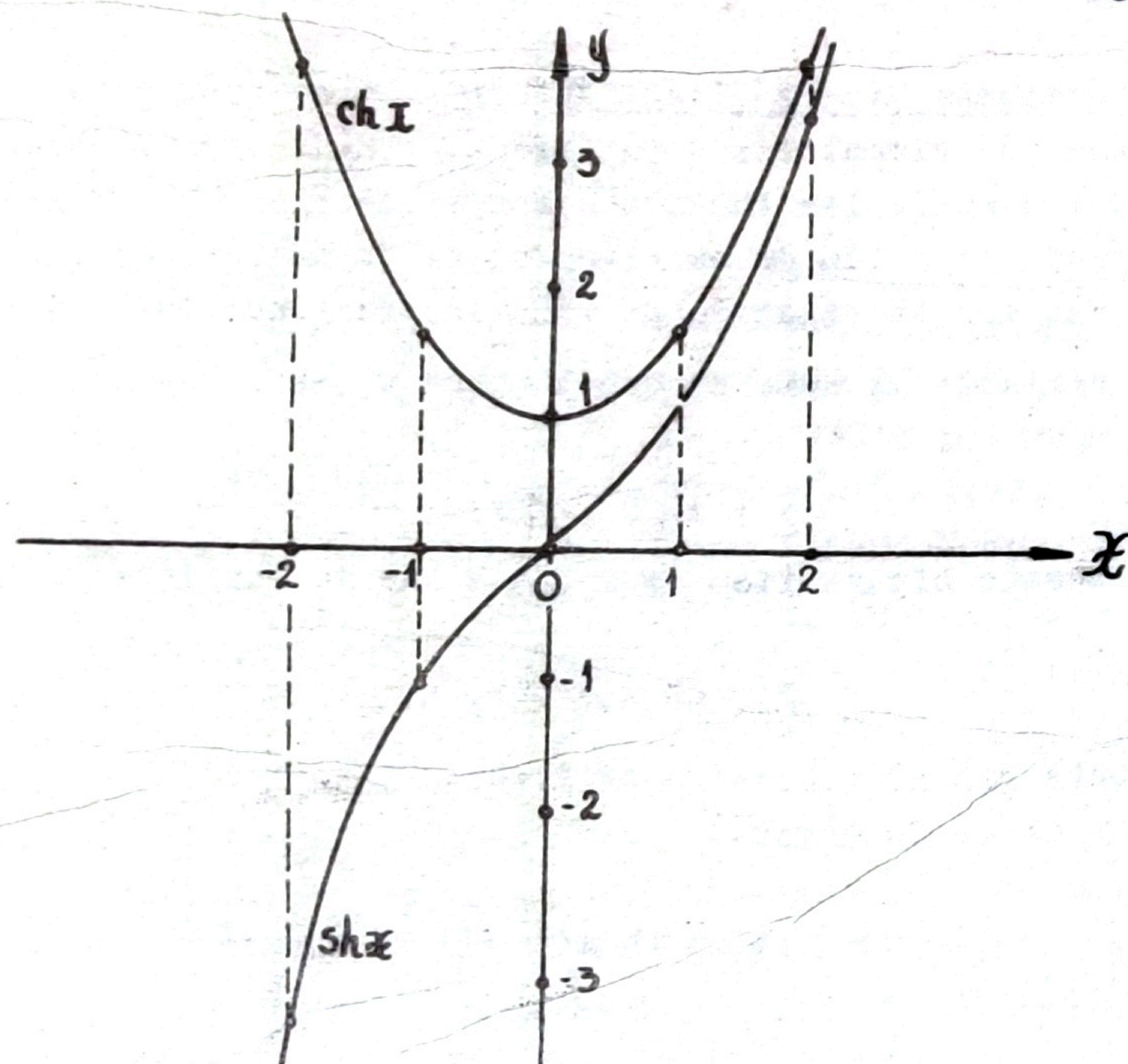
De las expresiones (1) y (2) resulta:

$$\text{sh } (-x) = -\text{ sh } x \quad ; \quad \text{ch } (-x) = \text{ch } x$$
$$\text{sh } 0 = 0 \quad ; \quad \text{ch } 0 = 1$$

relaciones análogas a las de sen x y cos x.-

Para representar gráficamente las funciones sh x y ch x, si se han trazado las curvas $y_1 = e^{x}$; $y_2 = e^{-x}$, simétricaas entre sí, basta tomar respectivamente la semidiferencia y la semisuma de ordenadas (figura V.38). Empleando tablas de la función exponencial pueden construirse las representaciones gráficas de las funciones hiperbólicas; pero, dado su uso frecuente, existen numerosas tablas de estas funciones.-

La representación gráfica de y = f(x) = ch x (figura V.38) es una curva que habitualmente se denomina catenaria, pues es la forma que toma un cable o cadena suspendido por sus extremos, bajo la acción de gravedad.-



- figura V.38 -

Mientras y = f(x) = sh x es función impar, o sea f(-x) = -f(x); resulta y = f(x) = ch x función par, o sea f(x) = f(-x). En efecto:

para sh x:

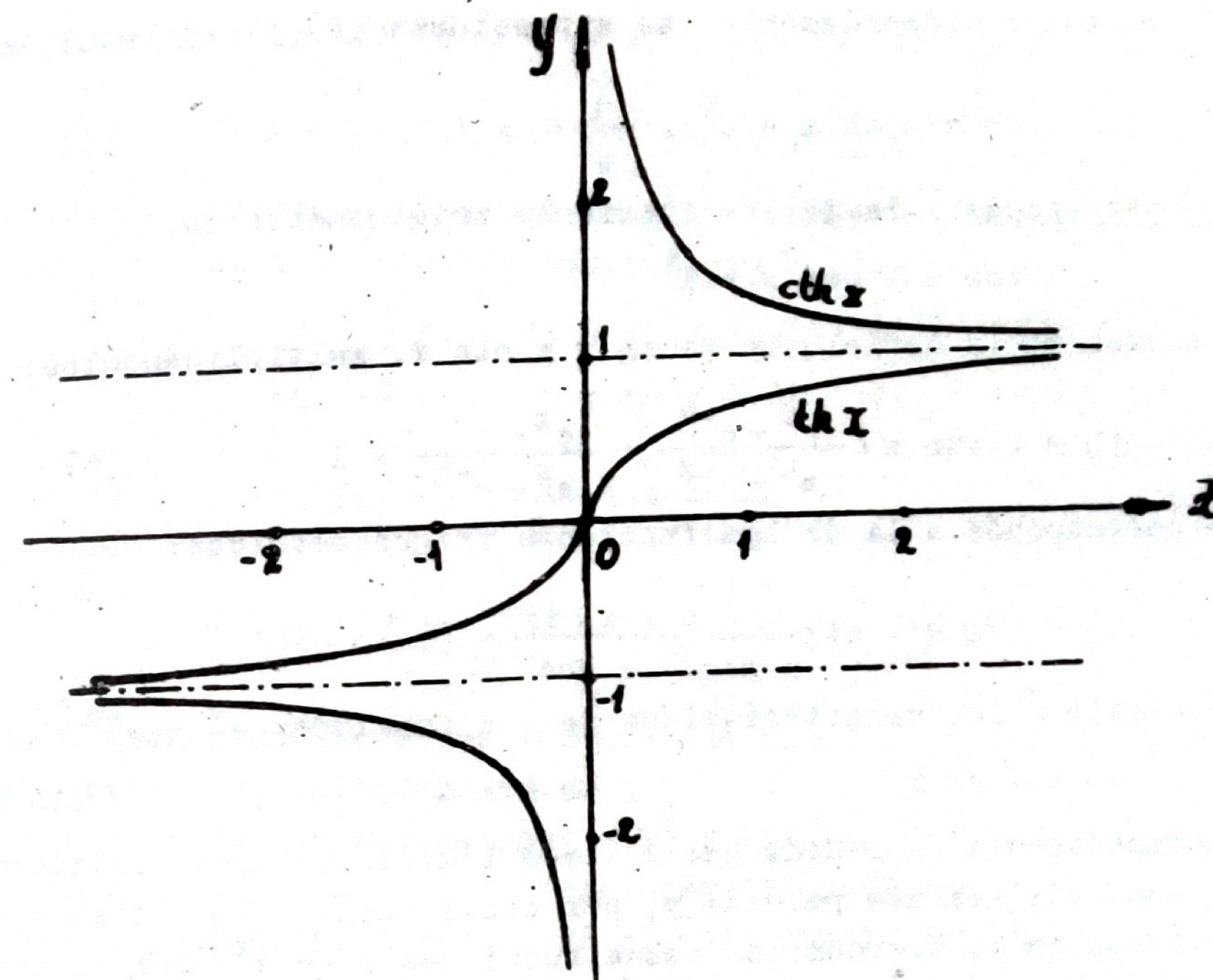
$$\text{sh } (-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\text{ sh } x$$

para ch x:

$$\text{ch } (-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \text{ch } x$$

En estas funciones el intervalo de definición, dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$ $[-\infty, \infty]$, es infinito y abierto.-

La representación gráfica de las funciones th x y cth x se aprecia en la figura V.39.-



- figura V.39 -

Las funciones th x y cth x son impares. En efecto:

para th x:

$$\text{th } (-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\text{ th } x$$

para cth x:

$$\text{cth } (-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = -\frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = -\text{ cth } x$$

En la función th x el intervalo de definición dado por la desigualdad $-\infty < x < \infty$ $[-\infty, \infty]$, es infinito y abierto; en cambio en cth x, viene dado por las expresiones $-\infty < x < 0$ $[-\infty, 0]$ y $0 < x < \infty$ $[0, \infty]$.-

Para obtener la representación gráfica de sch x y csch x debe tomarse en consideración los diagramas de sus recíprocas ch x y sh x correspondientes.-

V.12.- Propiedades de las funciones hiperbólicas.- Las siguientes, son las principales propiedades de las funciones hiperbólicas:

a) se deduce de la definición de sh x y ch x:

$$\text{ch } x + \text{sh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x \qquad (1)$$

$$\text{ch } x - \text{sh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{e^x} \qquad (2)$$

b) multiplicando ordenadamente las expresiones (1) y (2) resulta:

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = e^x \cdot \frac{1}{e^x} = 1 \qquad (3)$$

que corresponde a la de las funciones trigonométricas:

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$$

c) se deduce de la definición de th x y cth x, multiplicándolas:

$$\text{th } x \cdot \text{cth } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 \qquad (4)$$

que corresponde a la de las funciones trigonométricas:

$$\text{tg } x \cdot \text{ctg } x = 1$$

d) de acuerdo a las características de las funciones e^x y e^{-x} se deduce:

$$\text{sh } x < \text{ch } x \quad ; \quad |\text{th } x| < 1 \quad ; \quad |\text{cth } x| > 1$$

en consecuencia: a medida que x crece tomando valores positivos, e^{-x} se hace cada vez más pequeña y, por consiguiente, sh x tiende a confundirse con ch x, acercándose ambas funciones a $\frac{1}{2}e^x$. Por lo tanto th x y cth x se acercan a 1, la primera por valores inferiores a 1 y la segunda por valores superiores a 1.-

e) son válidas las siguientes relaciones:

$$1 - \text{th}^2 x = \text{sch}^2 x \qquad (5)$$

$$\text{cth}^2 x - 1 = \text{csch}^2 x \qquad (6)$$

En efecto: la expresión (5) se obtiene así:

$$1 - \frac{\text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = \text{sch}^2 x$$

en tanto que la expresión (6) resulta:

$$\text{cth}^2 x - 1 = \frac{\text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x} - 1 = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{sh}^2 x} = \frac{1}{\text{sh}^2 x} = \text{csch}^2 x$$

y ambas por aplicación de la expresión (3).

Estas expresiones son análogas a las relaciones trigonométricas:

$$1 - \text{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$\text{ctg}^2 x - 1 = \text{cosec}^2 x$$

f) del concepto de función par e impar resultan las siguientes relaciones para las funciones hiperbólicas:

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh } x \qquad (7)$$

$$\text{ch}(-x) = \text{ch } x \qquad (8)$$

$$\text{th}(-x) = -\text{th } x \qquad (9)$$

$$\text{cth}(-x) = -\text{cth } x \qquad (10)$$

$$\text{sch}(-x) = \text{sch } x \qquad (11)$$

$$\text{csch}(-x) = -\text{csch } x \qquad (12)$$

g) para calcular la relación $(\text{ch } x + \text{sh } x)^n$ vale la fórmula de MOIVRE, luego:

$$(\text{ch } x + \text{sh } x)^n = \text{ch } nx + \text{sh } nx \qquad (13)$$

h) para la adición de argumentos las funciones hiperbólicas presentan expresiones semejantes a las trigonométricas:

$$\text{sh}(x \pm y) = \text{sh } x \text{ ch } y \pm \text{ch } x \text{ sh } y \qquad (14)$$

$$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch } x \text{ ch } y \pm \text{sh } x \text{ sh } y \qquad (15)$$

$$\text{th}(x \pm y) = \frac{\text{th } x \pm \text{th } y}{1 \pm \text{th } x \text{ th } y} \qquad (16)$$

$$\text{cth}(x \pm y) = \frac{\text{cth } x \text{ cth } y \pm 1}{\text{cth } y \pm \text{cth } x} \qquad (17)$$

La sch x y csch x no presentan fórmulas de adición especiales por ser poco frecuentes sus aplicaciones.-
La demostración de las expresiones (14) a (17) se realiza aplicando las definiciones de las respectivas funciones hiperbólicas y multiplicando ordenadamente miembro a miembro. En el caso particular de las expresiones (14) y (15) debe aplicarse la relación (1) y (2).-

i) como casos particulares de duplicación de argumentos, haciendo x = y resultan las fórmulas siguientes:

$$\text{sh } 2x = 2\text{sh } x \cdot \text{ch } x \qquad (18)$$

$$\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x \qquad (19)$$

$$\text{th } 2x = \frac{2\text{th } x}{1 + \text{th}^2 x} \qquad (20)$$

$$\text{cth } 2x = \frac{\text{cth}^2 x + 1}{2 \text{ cth } x} \qquad (21)$$

Finalmente sumando y restando de la expresión (19), la relación (3), se obtiene respectivamente:

$$\text{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\text{ch } 2x + 1) \qquad (21)$$

$$\text{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\text{ch } 2x - 1) \qquad (22)$$

V.13.- **Funciones hiperbólicas inversas: concepto.-** La relación:

$$y = f(x) = \text{sh } x$$

puesta en la forma

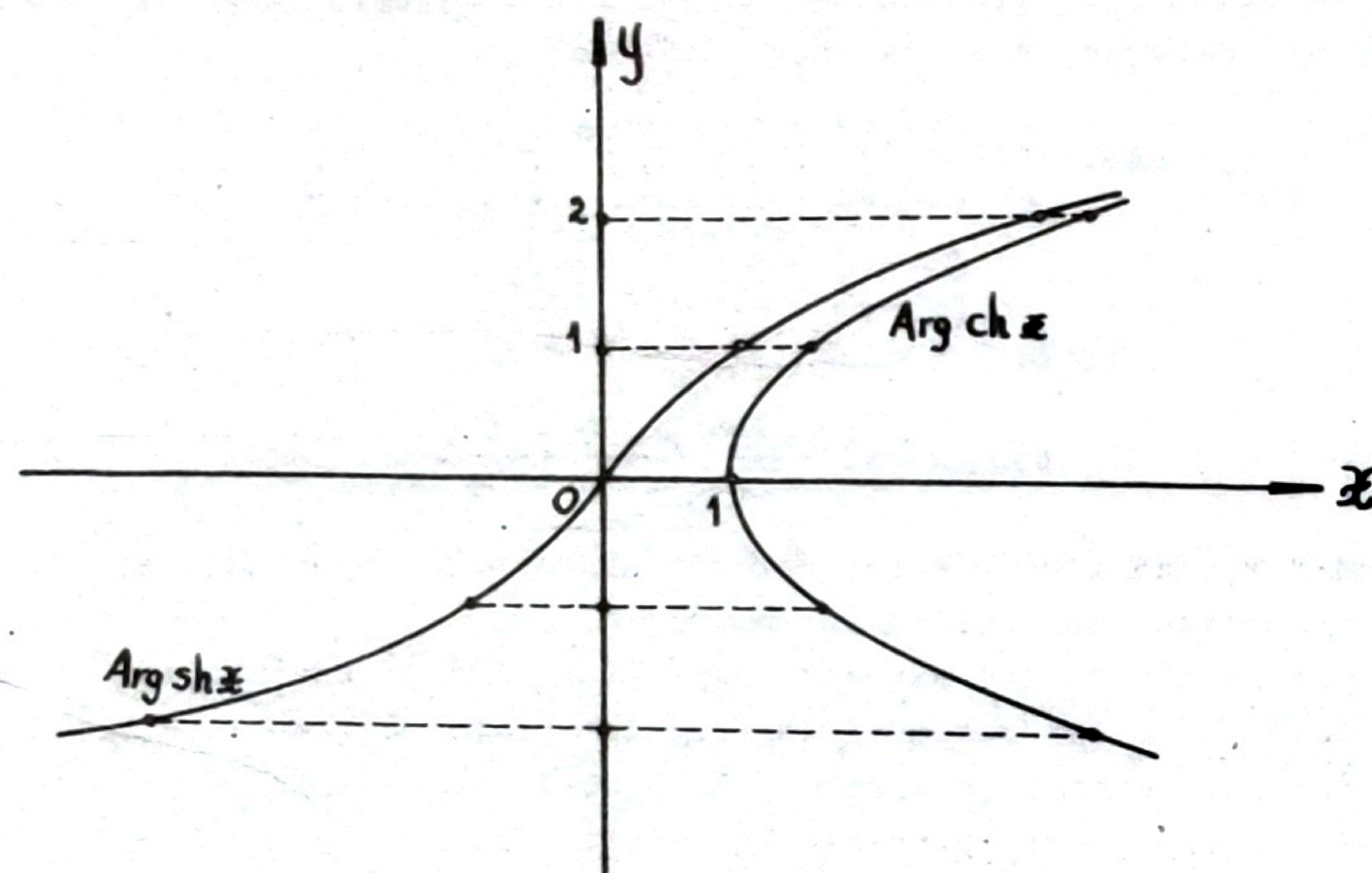
$$x = f(y) = \text{Arg sh } y$$

es la función inversa de la anterior y se lee: argumento cuyo seno hiperbó lico es y.-

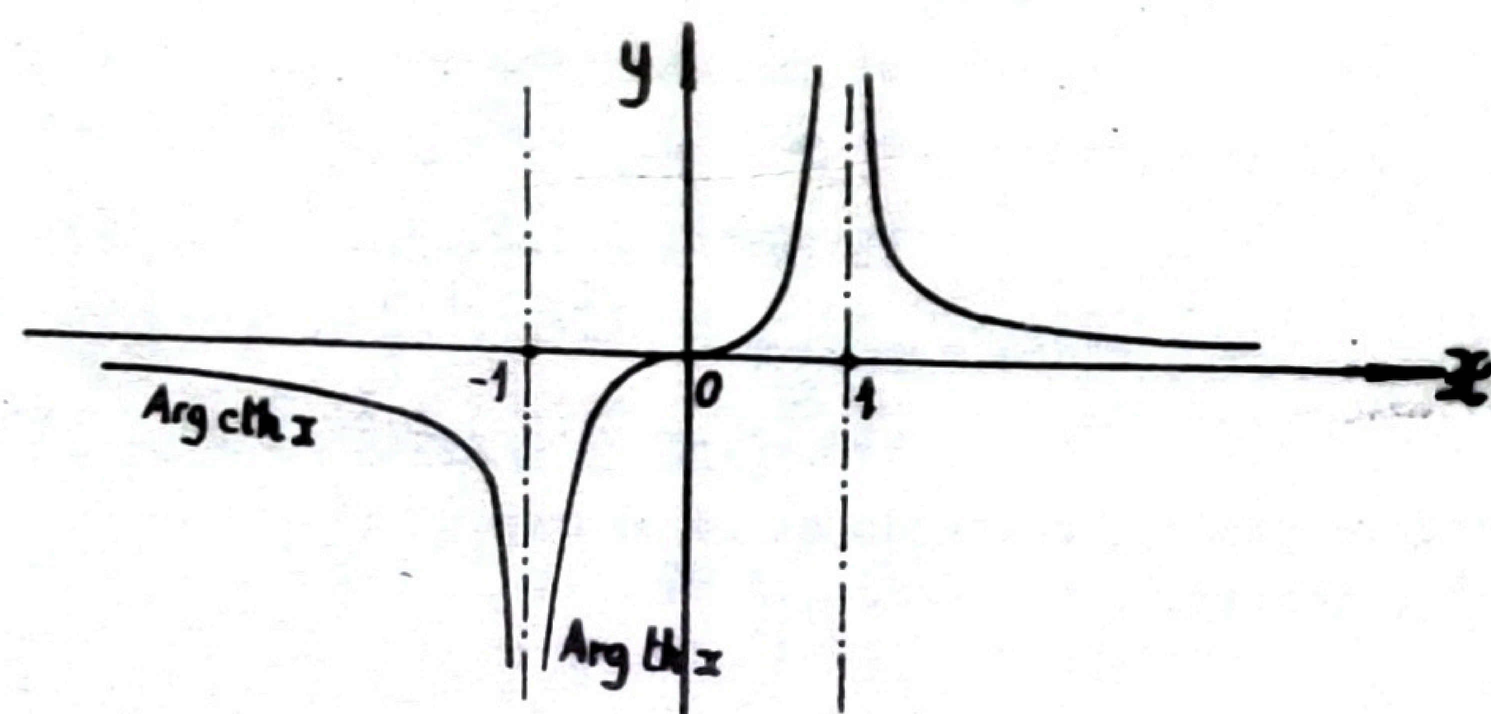
Análogamente: si

$y = f(x) = \text{ch } x$	la función inversa es	$x = f(y) = \text{Arg ch } y$
$y = f(x) = \text{th } x$	" " " "	$x = f(y) = \text{Arg th } y$
$y = f(x) = \text{cth } x$	" " " "	$x = f(y) = \text{Arg cth } y$
$y = f(x) = \text{cth } x$	" " " "	$x = f(y) = \text{Arg cth } y$
$y = f(x) = \text{sch } x$	" " " "	$x + f(y) = \text{Arg sch } y$
$y = f(x) = \text{csch } x$	" " " "	$x = f(y) = \text{Arg csch } y$

Basándonos en el procedimiento geométrico que permite construir la representación gráfica de la inversa de una función, conocida la correspondiente representación de ésta, en las figuras V.40 y 41 se han representado gráficamente las funciones hiperbólicas inversas.-



- figura V.40 -



- figura V.41 -

V.14.- Propiedades de las funciones hiperbólicas inversas.- Entre las principales propiedades de las funciones hiperbólicas estudiaremos sus relaciones con los logaritmos naturales; estas propiedades se deducen en base al concepto de función hiperbólica y su estudio se justifica por la frecuencia de su aplicación en el cálculo de integrales.-

a) La relación:

$$\text{Arg sh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad (1)$$

En efecto: sea:

$$y = f(x) = \text{Arg sh } x$$

su inversa es:

$$x = f(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \qquad (2)$$

multiplicando término a término el primer y tercer miembro de la igualdad (2) por e^y:

$$xe^y = \frac{e^{2y} - e^0}{2}$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

ecuación de segundo grado en e^y, donde:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \qquad (3)$$

En la expresión (3): $\sqrt{x^2 + 1} > x$, por lo tanto debe desecharse el signo negativo antepuesto al radical dado que sino resultaría $e^y < 0$, relación imposible. Luego:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

tomando logaritmos naturales:

$$e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

o sea:

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad (4)$$

finalmente igualando el primer miembro de la expresión (4) con la expresión $y = f(x) = \text{Arg sh } x$, resulta (1).-

b) La relación:

$$\text{Arg ch } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad (5)$$

donde, para evitar ambigüedades, nos limitamos en su gráfica a la rama $x \geq 0$, $y \geq 1$.-

En efecto: sea

$$y = f(x) = \text{Arg ch } x$$

su inversa es:

$$x = f(y) = \text{ch } y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

multiplicando miembro a miembro por e^y:

$$xe^y = \frac{e^{2y} - e^0}{2}$$

$$2xe^y = e^{2y} - 1$$

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

ecuación de segundo grado en e^y, donde:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

tomando logaritmos naturales para $x \geqslant 1$:

$$y \ln e = \ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

como $\ln e = 1$, siendo $y = f(x) = \text{Arg ch } x$, resulta reemplazando:

$$y = f(x) = \text{Arg ch } x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$$

c) De $y = f(x) = \text{Arg th } x$ resulta:

$$x = f(y) = \text{th } y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

multiplicando por e^y el numerador y denominador del último miembro es:

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad \text{o sea} \quad e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

Considerando x comprendido entre -1 y +1 es $\frac{1+x}{1-x} > 0$, y tomando logaritmos naturales resulta:

$$y = f(x) = \text{Arg th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \qquad (6)$$

d) La relación:

$$y = f(x) = \text{Arg cth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \qquad (7)$$

se demuestra en forma análoga a la indicada para la expresión (6).-

EJERCICIOS A RESOLVER

1) Representar gráficamente en el intervalo ([illegible], 4) las funciones:

$$y = f(x) = a^x \quad ; \quad y = g(x) = a^{-x}$$

para los valores de la constante a expresados a continuación:

a) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1 ; b) 2 ; 3 ; 4

c) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; d) 5 ; 6 ; 7

2) Representar gráficamente en el intervalo (0 , 100) las funciones:

$$y = f(x) = \log x \quad ; \quad y = g(x) = \ln x \quad ; \quad y = h(x) = \log_m x$$

para los valores de m:

a) 6 ; $\frac{1}{2}$; b) 4 ; $\frac{1}{3}$; c) 3 ; $\frac{1}{4}$

3) Resolver gráficamente en forma aproximada las ecuaciones:

a) $2x - 3 \log x = 6$; b) $x^2 - 10 \log x - 3 = 0$

representando las curvas $y_1 = \log x$ e $y_2 = \frac{2}{3}(x - 3)$; $y_3 = 10 \log x$ e $y_4 = x^2 - 3$, respectivamente, y determinando sus intersecciones.-

$R_a = 3,88$; $0,01$; R_b: $x_1 = 0,5$; $x_2 = 2,7$

4) Representar la gráfica semilogarítmica de la función:

$$y = f(x) = ab^{cx}$$

en el intervalo (0 , 10) y para los valores de a, b y c, respectivamente, indicados a continuación:

a) 0,01 ; 3 ; 8 ; b) 0,001 ; 5 ; 6 ; -100.000 ; 9 ; -2

5) Representar las gráficas semilogarítmicas de la siguiente función, en el intervalo indicado:

$$L = \left(2 \ln \left[\frac{2a}{d} \right] 0,5 \right) 10^{-4}$$

para d = 3 mm. y en el intervalo (a_1 = 9 mm.; a_2 = 120 mm.)

(fórmula de autoinducción,en H/km, en líneas de corriente alterna de diámetros d, siendo a la distancia entre conductores).-

6) Representar la gráfica doblelogarítmica, en el intervalo (10^{-4};10^4) de las siguientes funciones:

$y = f(x) = 0,2\, x^{1,6}$; $y = f(x) = 6\, x^{-1,2}$

$S = f(r) = \pi r^2$ (area del círculo) ; $y = f(x) = \frac{4}{x^7}$

$y = f(x) = \sqrt[7]{x}$; $y = f(x) = \sqrt[6]{x}$

7) Representar las gráficas doblelogarítmicas de la siguiente función, en el intervalo indicado:

$$Q = 0,239\, R I^2 t \qquad \text{(ley de JOULE)}$$

(para R = 1000 Ω ; t = 1 seg) en el intervalo I_1 = 2A ; I_2 = 20 A

8) Representar en el intervalo $(0, 2\pi)$ las seis funciones trigonométricas, agrupándolas en tres gráficas (cada función y su recíproca)

$y = f(x) = \text{sen } x$; $y = f(x) = \cos x$; $y = f(x) = \text{tg } x$
$y = f(x) = \text{cosec } x$; $y = f(x) = \sec x$; $y = f(x) = \text{ctg } x$

9) Representar en el intervalo $(-10, 10)$ los valores principales de las seis funciones circulares inversas:

$y = f(x) = \text{arc sen } x$; $y = f(x) = \text{arc ctg } x$
$y = f(x) = \text{arc cos } x$; $y = f(x) = \text{arc sec } x$
$y = f(x) = \text{arc tg } x$; $y = f(x) = \text{arc cosec } x$

10) Llevar a la forma general:

$$y = f(x) = a \text{ sen } (\omega x + \alpha)$$

(con $a > 0$ y $\omega > 0$) las siguientes funciones:

$y = 2 \cos \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} x\right]$; $y = -4 \text{ sen } \left[\frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{8} x\right]$
$y = -5 \cos \left[\frac{2\pi}{5} x - \frac{\pi}{6}\right]$; $y = -8 \text{ sen } \left[\frac{\pi}{3} - \frac{9}{2} x\right]$

11) Representar en un mismo gráfico una onda completa de las siguientes funciones:

$y = f(x) = -4 \text{ sen } \left[\frac{5}{2} x + \frac{\pi}{3}\right]$
$y = f(x) = 4 \cos \left[\frac{4}{3} x - \frac{2\pi}{3}\right]$

12) Sumar las funciones representadas en 11).-

13) Multiplicar gráficamente las funciones representadasen 11).-

14) Representar en el intervalo $(-4, 4)$ las funciones hiperbólicas:

$y = f(x) = \text{sh } x$; $y = f(x) = \text{cth } x$
$y = f(x) = \text{ch } x$; $y = f(x) = \text{sch } x$
$y = f(x) = \text{th } x$; $y = f(x) = \text{csch } x$

15) Representar gráficamente las funciones hiperbólicas inversas:

$y = f(x) = \text{Arg sh } x$; $y = f(x) = \text{Arg cth } x$
$y = f(x) = \text{Arg ch } x$; $y = f(x) = \text{Arg sch } x$
$y = f(x) = \text{Arg th } x$; $y = f(x) = \text{Arg csch } x$

16) Representar las siguientes funciones en el intervalo $(-10, 10)$

$y = 2 \text{ ch } (6x^2 + 7x - 3)$; $y = 3 \text{ th } (7 - 5x - 2x^2)$
$y = -\text{ch } (3x^2 - x - 24)$; $y = 2 \text{ cth } (4 + 3x - x^2)$

CAPITULO VI

REPRESENTACION GRAFICA EN COORDENADAS POLARES

VI.1.- **Naturaleza del problema a estudiar.**- Utilizando el sistema en coordenadas polares es posible representar gráficamente funciones sencillas de uso frecuente en aplicaciones teóricas y prácticas. Tal es el objeto del capítulo presente.-

En el parágrafo II.3 se explicó el fundamento y método del trazado por puntos en el sistema de representación en coordenadas polares; por su parte, en el parágrafo II.4 se analizaron las fórmulas de transformación entre dicho sistema y el de coordenadas cartesianas; finalmente, algunas aplicaciones especiales para obtener la ecuación polar de una curva cualquiera, cuya función es conocida, se consignaron en el parágrafo III.15, como así también para el caso de la recta (parágrafo III.17).-

Las funciones a estudiar en el presente capítulo han sido analizadas en el sistema de representación en coordenadas cartesianas; con solo reemplazar en sus respectivas ecuaciones ω y ρ por x e y, se aprecia la sencillez de notaciones.-

VI.2.- **Espiral de Arquímides.**- Llámase así la función:

$$\rho = f(\omega) = a\,\omega \qquad (1)$$

siendo a constante. En el sistema de representación en coordenadas cartesianas su diagrama es una recta que corta al eje de ordenadas en el punto origen y de pendiente m (ver parágrafo III.3 -figura III.2).-

Cuando la variable ω es nula ($\omega = 0$) resulta $\rho = f(\omega) = 0$; la curva representativa tiene un punto singular en el polo $O(0, 0)$.-

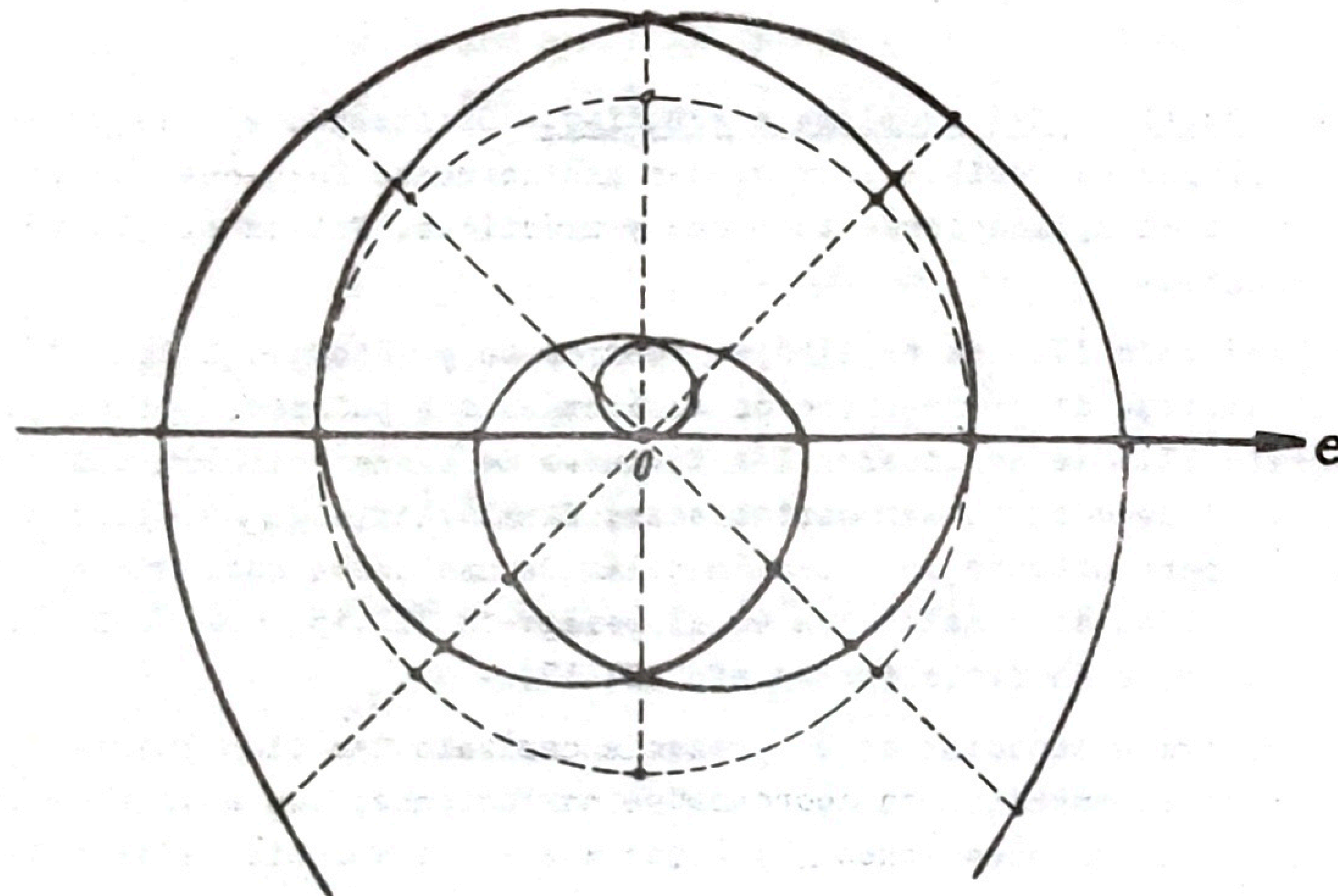
Cuando ω es positivo y crece ($\omega > 0$) resulta $\rho = f(\omega)$ también creciente; en cambio, para ω negativo y decreciente ($\omega < 0$) se obtiene $\rho = f(\omega)$ también decreciente.-

La representación gráfica de la función (figura VI.1) es una curva tangente al eje polar en el polo O; consta de dos ramas simétricas respecto de la normal en el polo al eje polar (es decir de la recta $\omega = \frac{\pi}{2}$) y como el radio-vector ρ crece proporcionalmente al argumento, carece de toda singularidad que pudiera dificultar su trazado.-

Mediante el trazado de unos pocos puntos puede obtenerse el diagrama con suficiente aproximación.-

Analicemos la distancia entre dos puntos que pertenecen a un mismo rayo. Cuando ω se incrementa en un valor $2k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$) resulta $\rho = f(\omega) = a\omega = a(\omega + 2k\pi)$. En consecuencia: la distancia entre dos puntos α y α_1 de un mismo rayo cualesquiera vale:

$$\delta = OQ_1 - \rho = a(\omega + 2k\pi) - a\omega = 2k\pi \qquad (2)$$



- figura VI.1 -

En la figura VI.1 se ha representado la función $\rho = f(\omega) = 2\omega$

Geométricamente la espiral es una curva plana definida por el movimiento uniforme de un punto que, girando en torno de otro fijo, varía su distancia con respecto a éste. Luego: si llamamos rotación al giro del punto móvil en torno al fijo, y desplazamiento, la distancia entre ambos, resulta entonces que: la espiral es la curva generada por un punto que gira y se desplaza uniformemente con respecto a otro fijo.-

Geométricamente la espiral de Arquímides se define como la curva plana generada por la trayectoria de un punto que se traslada con movimiento uniforme sobre una recta que también gira con movimiento uniforme en torno a uno de sus puntos.-

Siendo los dos movimientos uniformes las traslaciones del punto sobre la recta son proporcionales a las rotaciones de éste.-

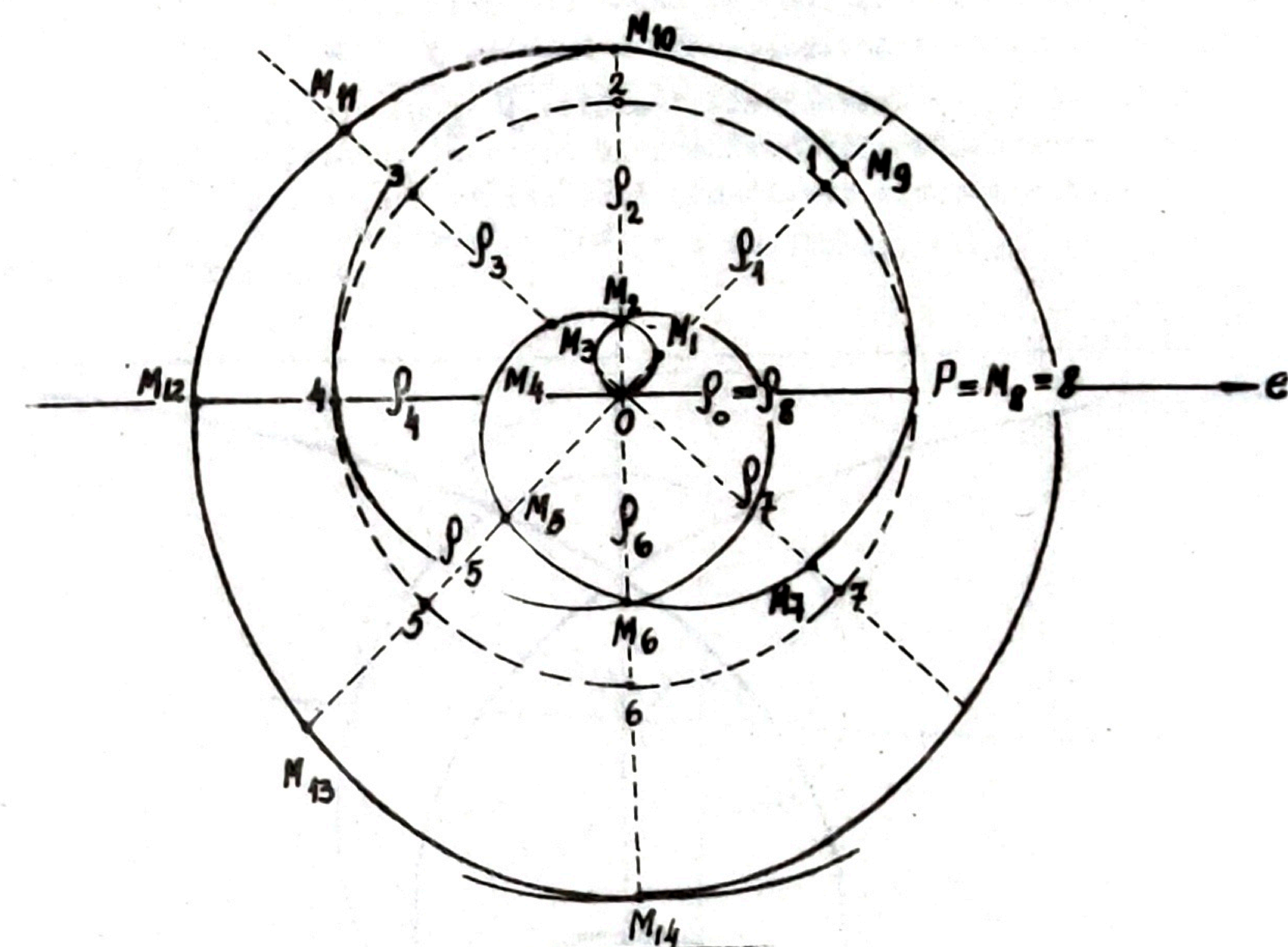
Llamaremos paso δ de la espiral al segmento de recta recorrido por el punto móvil cuando la recta da una vuelta completa; por lo tanto su valor equivale a la fórmula (2).-

A continuación se consigna un procedimiento para construir con exactitud la espiral de Arquímides, cualquiera sea el valor de la constante a.-

Sea el punto M móvil generador de la espiral (figura VI.2) y O el punto fijo de la recta cuya posición inicial OP coincide con el eje polar. Como $\rho = 0$ si $\omega = 0$, inicialmente el punto M móvil coincide con O.-

Supongamos que el punto M móvil luego de dar una vuelta completa tenga su posición final M_8 coincidente con P.-

Con centro en O y radio δ tracemos una circunferencia a quien dividimos en un número cualquiera de partes iguales (8). Dividamos también al paso δ en igual número de partes iguales (8). Como las traslaciones del punto móvil sobre la recta son proporcionales a sus rotaciones, cuando aquél haya girado media vuelta, su distancia a O ha de ser igual a $\frac{1}{2}\delta$; obtendremos el punto M_4 perteneciente a la espiral.-



- figura VI.2 -

Análogamente, cuando M gire un cuarto de vuelta su distancia a O será igual a $\frac{1}{4}\delta$; obtendremos M_2, y en general, para hallar los puntos de la espiral, si sobre los sucesivos radios que van a los puntos de división de la circunferencia, llevamos a partir de O tantas partes del paso δ como porciones de vuelta adopte el punto móvil M.-

Unidos los puntos O, M_1, M_2, ... , M_7, M_8 se obtiene la espiral de Arquímides.-

EJERCICIOS: a) Representar en el intervalo $(-4\pi, 4\pi)$ la función:

$$\rho = f(\omega) = a\omega$$

para los siguientes valores de a: 1 ; $\frac{2}{\pi}$; $\frac{3\pi}{4}$; 4 ; $\frac{1}{2\pi}$; $\frac{1}{3\pi}$; 3.-

VI.3.- **Espiral hiperbólica.**- Llámase así la función:

$$\rho = f(\omega) = \frac{a}{\omega}$$

siendo a constante. En el sistema de representación en coordenadas cartesianas su diagrama es una hipérbola (ver Capítulo VIII).-

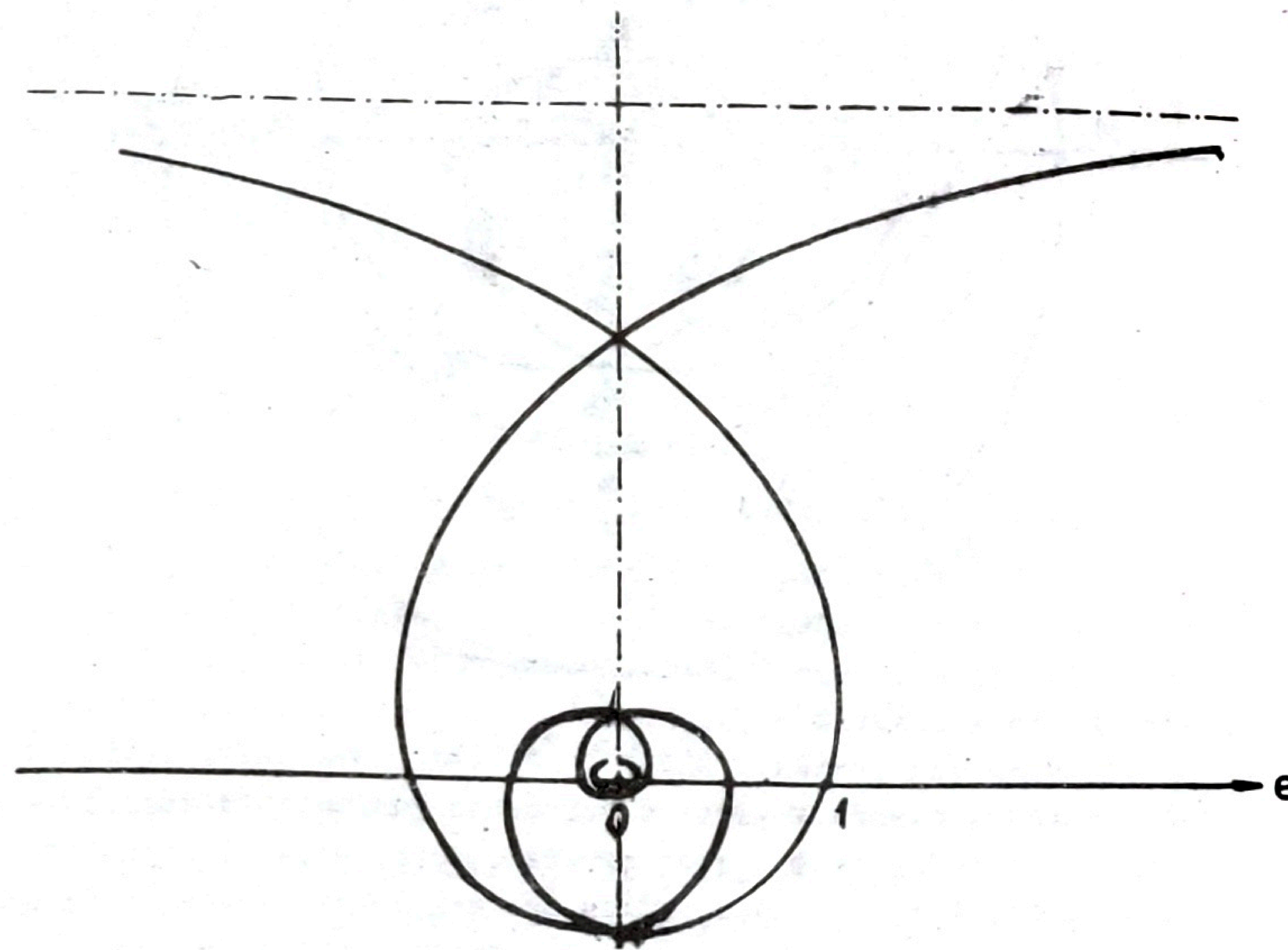
Su intervalo de definición, está dado por las desigualdades:

$$-\infty < x < 0 \qquad [-\infty, 0)$$
$$0 < x < \infty \qquad (0, \infty]$$

porque, si $\omega = 0$ la función no existe.-

Si $\omega > 1$ y creciente, resulta $\rho = f(\omega)$ decreciente y asintótica al polo; la gráfica de la función, en torno del polo O, describe infinitas vueltas sin llegar a alcanzarlo. Si $\omega = 1$ resulta $\rho = f(\omega) = a$.-

Si $0 < \omega < 1$ y decreciente, resulta $\rho = f(\omega)$ creciente; la curva representativa de la función tiende a la recta a, paralela al eje polar, pero sin llegar a tocarla resultando ésta asintótica de aquélla.-



- figura VI.3 -

En síntesis: la representación gráfica de la función (figura VI.3) es una curva que tiene por asíntotas al polo O y la recta a, paralela al eje. El trazado de unos pocos puntos permite obtener el diagrama con suficiente aproximación. Dos ramas simétricas respecto de la recta $\omega = \frac{\pi}{2}$ la forman.-

En la figura VI.3 se ha representado gráficamente la función:

$$\rho = f(\omega) = \frac{3\pi}{\omega}$$

EJERCICIOS: a) Representar gráficamente en el intervalo $(-4\pi, 4\pi)$ la función:

$$\rho = f(\omega) = \frac{a}{\omega}$$

para los siguientes valores de la con[illegible]nte a: 1; [illegible]; 2π; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{4}$.-

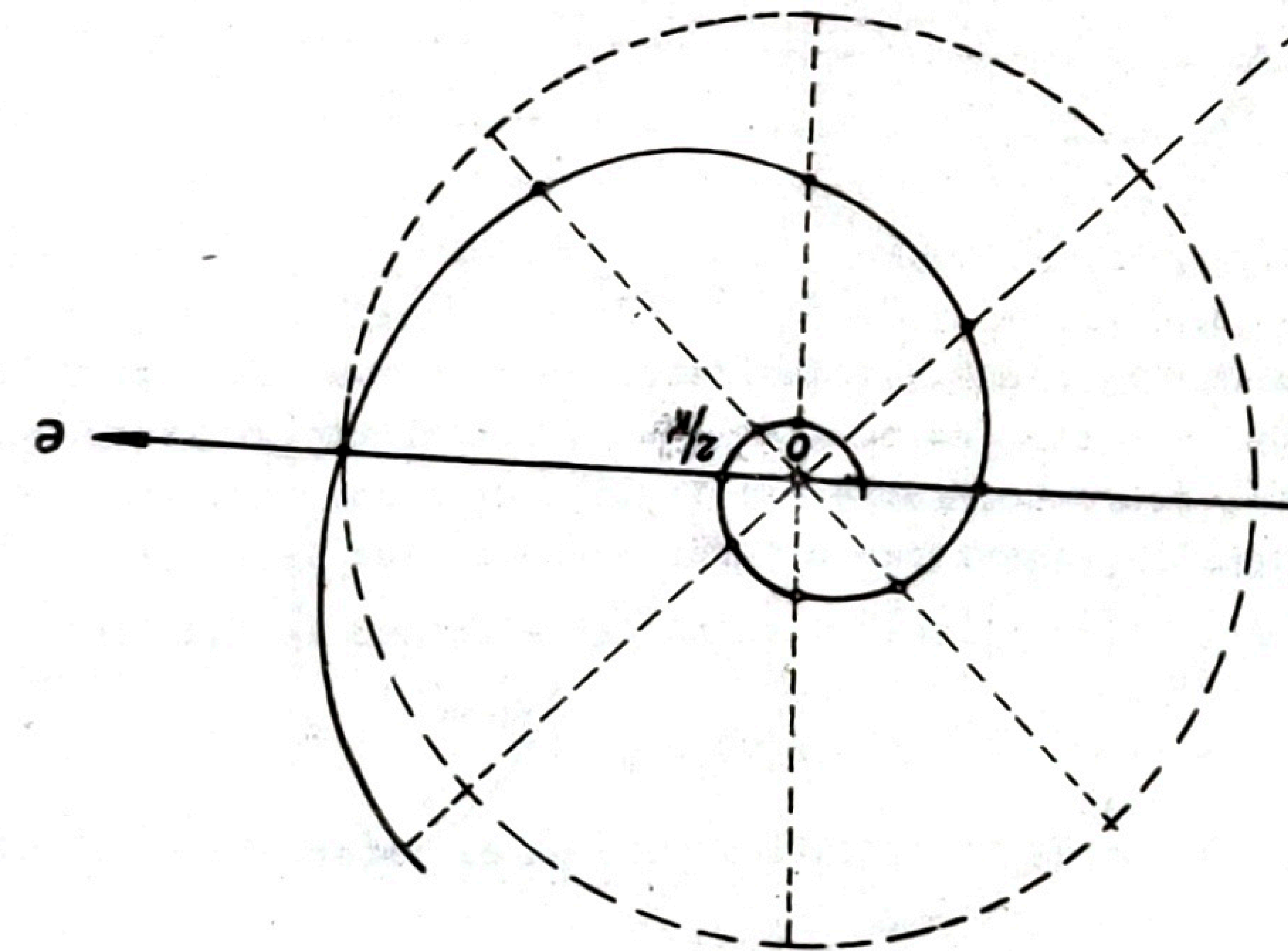
VI.4.- **Espiral logarítmica.**- Llámase así la función:

$$\rho = f(\omega) = ab^{c\omega}$$

donde a, b, c, son constantes. En el sistema de representación en coordenadas cartesianas su diagrama corresponde a la función exponencial.-

La constante b forzosamente tiene que ser positiva ($b > 0$) para hacer posible la existencia de la función considerada como exponencial (ver parágrafo V.2), y la supondremos mayor que la unidad ($b > 1$). Es evidente que si fuera $b = 1$ resultaría $\rho = f(\omega) = a$, obteniéndose por representación gráfica una circunferencia de radio $\rho = a$.-

Para $\omega = 0$ se obtiene $\rho = f(\omega) = a$ resultando sobre el eje polar el punto P(a , 0) (figura VI.4).-



- figura VI.4 -

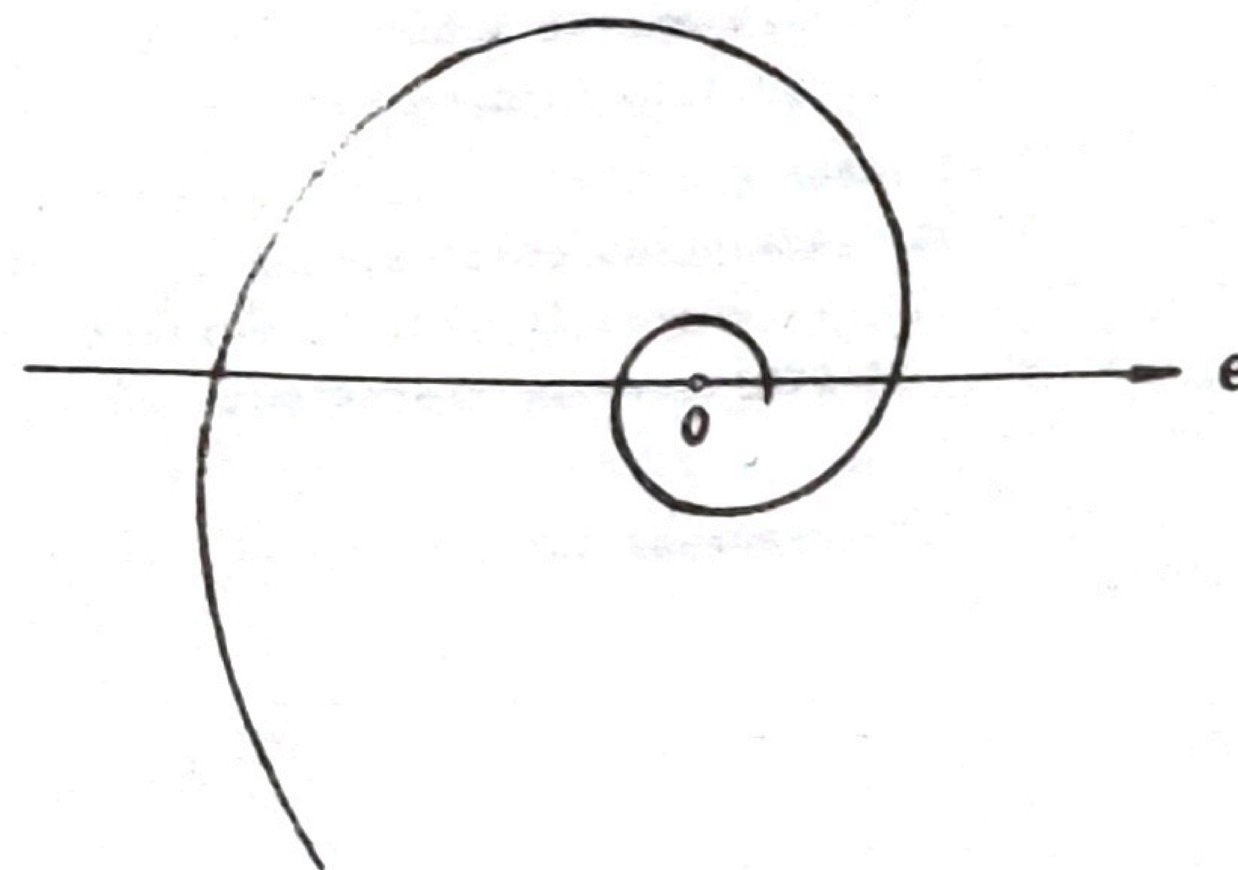
Para $c > 0$, si ω tiende a $-\infty$ resulta $\rho = f(\omega)$ decreciente y asintótica al polo. Cuando ω tiende a $+\infty$ resulta $\rho = f(\omega)$ creciente. La curva representativa se desarrolla en torno al polo resultando así la espiral logarítmica.-(figura VI.4).-

Para $c < 0$, si ω tiende a $+\infty$ resulta $\rho = f(\omega)$ decreciente y asintótica al polo. Cuando ω tiende a $-\infty$ resulta $\rho = f(\omega)$ creciente. La curva representativa se desarrolla en torno al polo resultando también así la espiral

logarítmica (figura VI.4).-

Si $0 < b < 1$ resulta como representación gráfica una curva que se enrrolla en sentido inverso de la estudiada (figura VI.5).-

La espiral logarítmica no presenta singularidades y unos pocos puntos permiten obtener su trazado con suficiente aproximación.-



- figura VI.5 -

Geométricamente la espiral logarítmica es la curva plana generada por la trayectoria de un punto que se traslada en movimiento uniforme y en progresión aritmética sobre una recta que también gira con movimiento uniforme pero en progresión geométrica en torno a uno de sus puntos.-

En la figura VI.4, gráficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = \frac{2}{\pi} 5^{\frac{2}{\pi}\omega}$$

EJERCICIOS: a) Representar gráficamente en el intervalo $(-4\pi, 4\pi)$ la función:

$$\rho = f(\omega) = ab^{c\omega}$$

para los siguientes valores de las constantes a, b, c:

1. $\frac{2}{\pi}$; 5 ; 3π ; 3. $\frac{3}{\pi}$; 2 ; $\frac{\pi}{4}$; 5. $\frac{4}{\pi}$; $\frac{1}{3}$; 2π

2. $\frac{1}{2\pi}$; 3 ; 5π ; 4. $\frac{1}{3\pi}$; 4 ; $\frac{\pi}{2}$; 6. $\frac{1}{4\pi}$; $\frac{1}{5}$; 2π

b) Representar gráficamente en el intervalo $(-4\pi, 4\pi)$ la función:

$$\rho = f(\omega) = ae^{c\omega}$$

para los siguientes valores de las constante a, c:

1.- -3 ; $\frac{\pi}{3}$; 2.- 1 ; 2π ; 3.- 4 ; $\frac{3\pi}{4}$; 4.- $\frac{1}{2}$; π

VI.5.- <u>Función sinusoidal.</u>- De muy frecuentes aplicaciones son las representaciones gráficas en coordenadas polares de las funciones sinusoidales:

$$\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}(m\omega+\alpha) \quad ; \quad \rho = f(\omega) = k\cos(m\omega+\alpha)$$

$$\rho^2 = f(\omega) = k^2\text{sen}(m\omega+\alpha) \quad ; \quad \rho^2 = f(\omega) = k^2\cos(m\omega+\alpha)$$

donde k (amplitud), m(pulsación) y α (fase inicial) son constantes.-

Estudiaremos sus diversas particularidades.-

a) TIPO: $\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}(m\omega+\alpha)$.- 1. De esta función, su expresión más simple viene dada así:

$$\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}\,\omega \qquad (1)$$

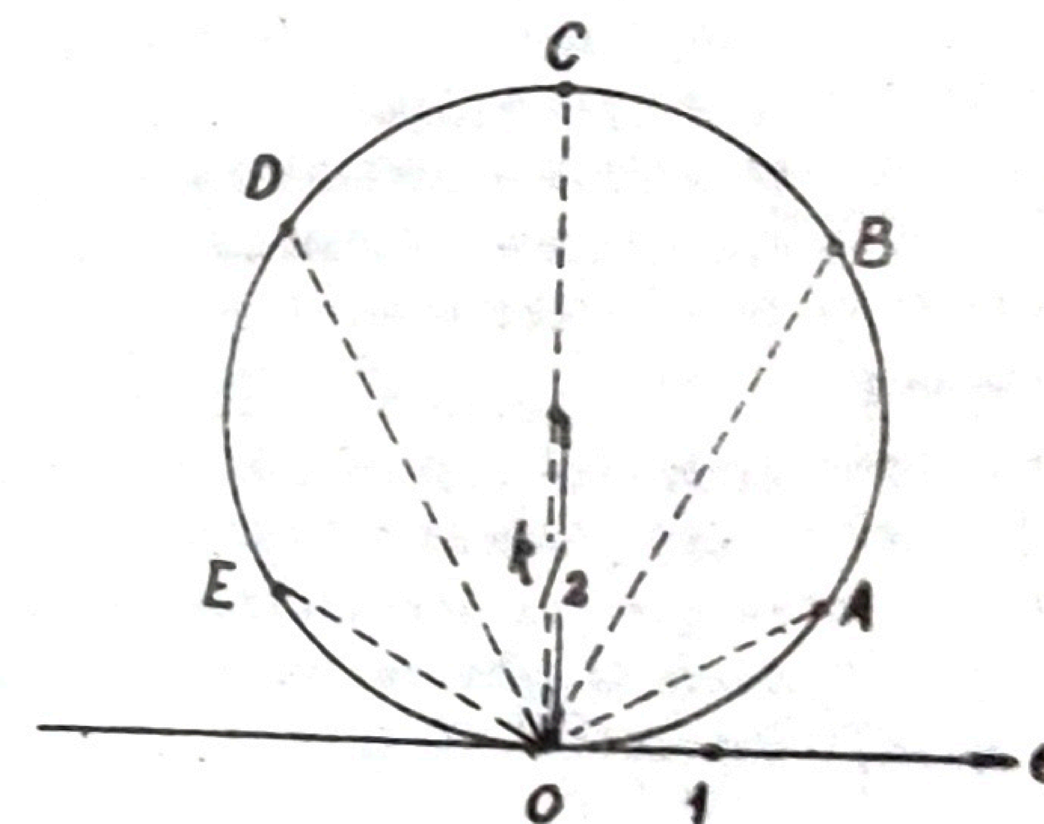
obtenida si $m = 1$ y $\alpha = 0$.-

La función de la expresión (1) es uniforme porque a cada valor de ω le corresponde un solo valor de $\rho = f(\omega)$.-

Sea la constante k positiva ($k > 0$). Formemos un cuadro de referencia, dando a ω valores en los cuadrantes primero y segundo, y representemos gráficamente los puntos obtenidos (figura VI.6), resulta:

ω	0	30	60	90	120	150	180
$\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}\,\omega$	0	0,5 k	0,87 k	k	0,87 k	0,5 k	0
	O	A	B	C	D	E	O

Para valores de ω comprendidos en los cuadrantes tercero y cuarto resultan los mismos valores de $\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}\,\omega$, pero negativos; ahora, como los valores negativos del módulo en el sistema de representación en coordenadas polares se trazan en las semirrectas opuestas sobre la que se miden, resultan entonces éstos coincidentes con aquéllos, obteniéndose así también los puntos O, A, B, ... E (figura VI.6).-



- figura VI.6 -

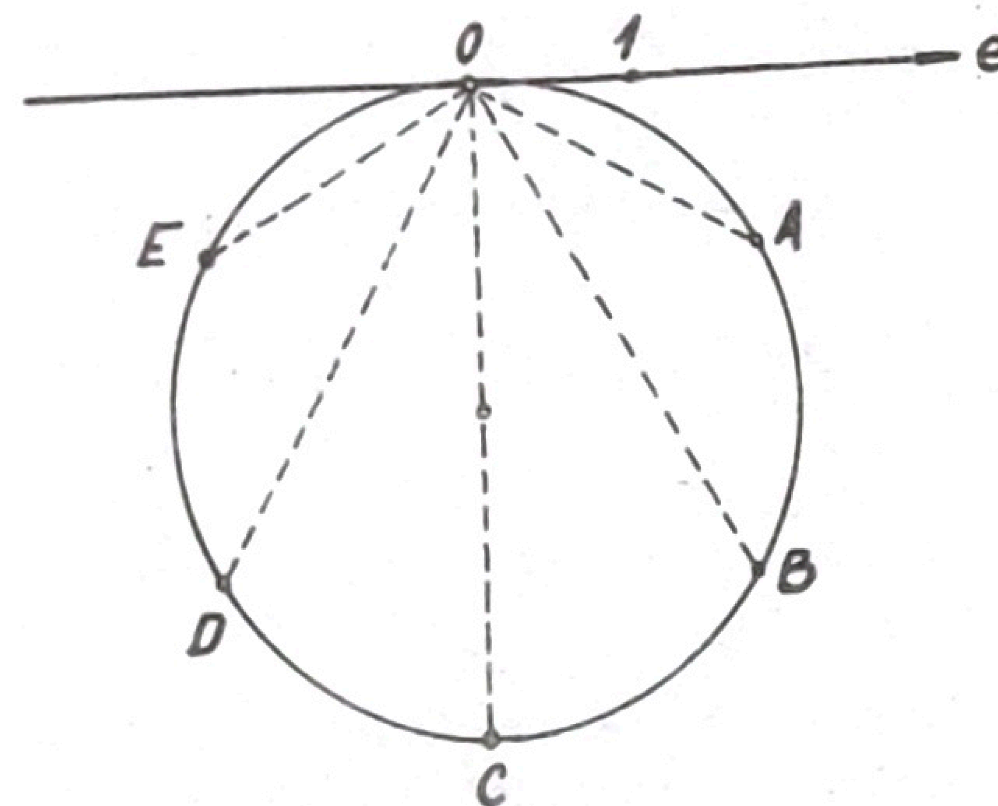
Unidos los puntos obtenidos, por representación gráfica de la función $\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}\,\omega$ con $k > 0$, resulta una circunferencia de diámetro $\overline{OC} = k$, o sea de radio $r = \frac{\overline{OC}}{2} = \frac{k}{2}$.-

Para la constante k negativa ($k < 0$) la representación gráfica (figura VI.7) de la función $\rho = f(\omega) = k\ \text{sen}\,\omega$ es simétrica de la anterior (figura VI.6), con respecto al eje polar.-

Mientras en la figura VI.6 graficamente se ha representado la función $\rho = f(\omega) = 4 \text{ sen } \omega$; en la figura VI.7 se ha procedido a representar graficamente la función $\rho = f(\omega) = -4 \text{ sen } \omega$.-

2.- Si la pulsación $m \neq 1$ y positivo, la expresión (1) se transforma así:

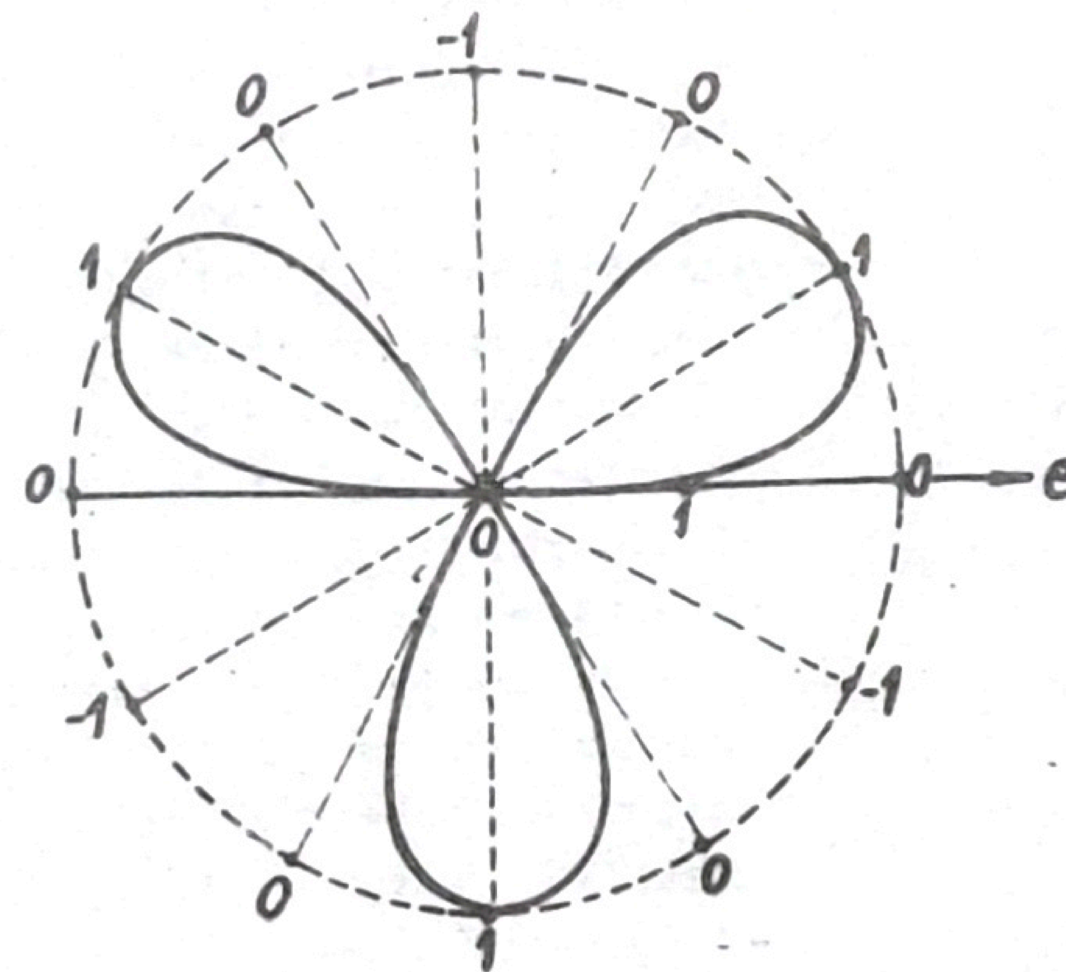
$$\rho = f(\omega) = k \text{ sen } m\omega$$



- figura VI.7 -

pudiéndose presentar distintas posibilidades, según sea el valor de la amplitud k y la pulsación m.-

Sea la constante k positiva ($k > 0$). El mayor valor que puede alcanzar ω es k, para valores de ω que hagan ± 1 al seno, y su menor valor es 0, para valores de ω que anulen al seno, o sea que, cuando arc sen $\omega = \pm 1$ es $\rho = f(\omega) = k$, mientras que, si arc sen $\omega = 0$ es $\rho = f(\omega) = 0$. En consecuencia: tracemos (figura VI.8) con centro en el origen del sistema de coordenadas polares una circunferencia de radio k; en este campo deberá representarse graficamente la función considerada, pero desde ya se induce por la frecuencia en que sen ω adquiere valores máximos, de $\pm$ 1, y mínimos, de 0, que $\rho = f(\omega)$ también tomará valores máximos y mínimos según lo sean aquéllos.-



- figura VI.8 -

Calculemos la distancia angular que separa los valores mínimos y máximos de $\rho = f(\omega)$. Para que tal eventualidad se produzca ω debe variar en $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$; entonces:

$$m\omega_2 - m\omega_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{2m} = \frac{90^\circ}{m} \qquad (2)$$

De acuerdo con la expresión (2), y teniendo en cuenta que para $\omega = 0$ es $\rho = f(\omega) = k \text{ sen } m\omega = 0$, es decir siempre corresponde un mínimo, divididos los cuadrantes (figura VI.8) en m partes iguales, resultarán alternadamente en ellas mínimos y máximos respectivamente. Se aconseja numerar correlativamente, a partir del semieje positivo polar y en sentido contrario a la marcha de las agujas del reloj, los mínimos y máximos obtenidos, con 0, 1, 0, -1, 0, 1, etc.-

Como entre dos mínimos(ceros) se sitúa una rama -llamada hoja- de la curva, lográndose su máximo en el punto medio, si el máximo entre dos mínimos (ceros) es positivo (+1), la hoja ocupa ese ángulo; en cambio, si es negativo (-1), el opuesto por el vértice.-

El número de hojas de la curva, llamada rosa por su forma, depende del valor de la pulsación m. Cuando la pulsación m es un número par, 2m hojas forman la rosa; en cambio si es un número impar, m hojas la forman. Ello así por lo que acabamos de significar anteriormente, dado que, si por ejemplo es m impar, a un máximo positivo (+1) -hoja de ese lado- se le opone siempre un máximo negativo (-1) -hoja del lado opuesto- que, al representarse, resultará superpuesta con aquélla (figura VI.8).-

La forma de las hojas en la rosa, son curvas tangentes a la circunferencia y a los lados del ángulo que las limitan. El polo O es un punto múltiple (doble, triple, etc.) que depende del número de hojas de la rosa.-

En la figura VI.8, graficamente se ha representado la función:

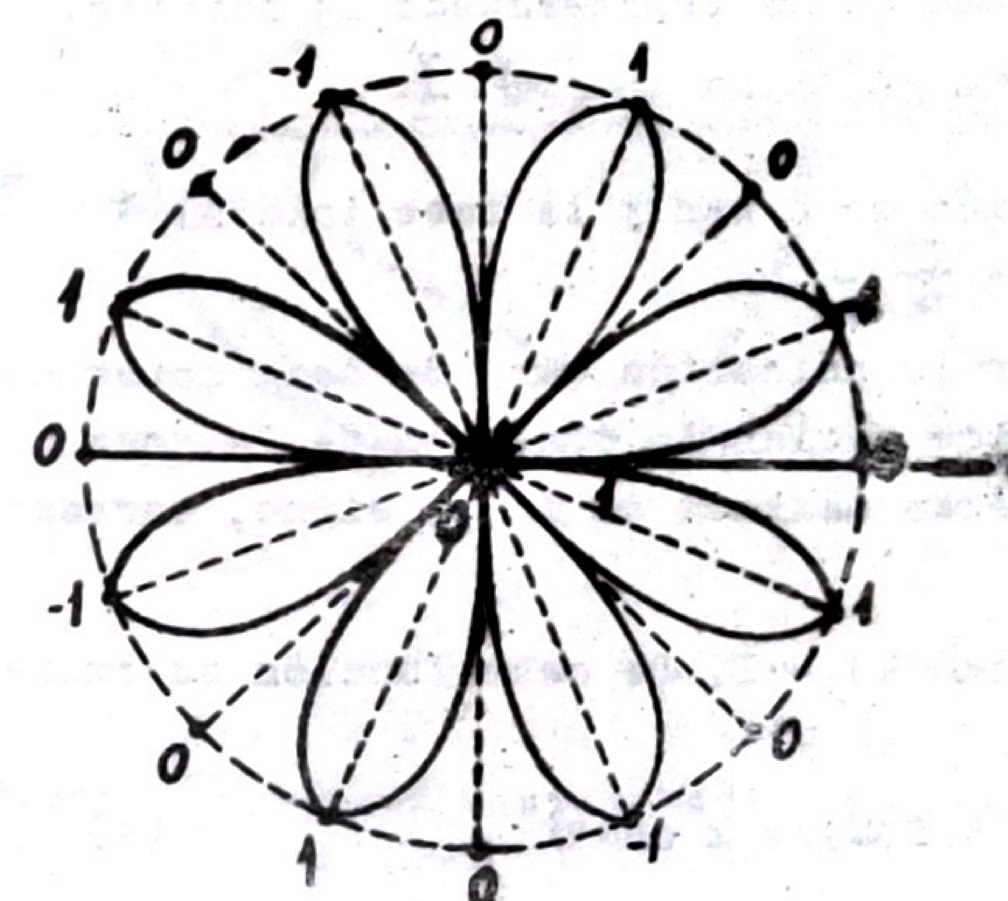
$$\rho = f(\omega) = 2 \text{ sen } 3\omega$$

Recordando el procedimiento genérico explicado, para este caso particular resulta: a) en primer lugar, se traza con centro en O y radio 2 una circunferencia; b) en segundo lugar se calcula la distancia angular, obteniéndose de acuerdo con la expresión (2):

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{90^\circ}{m} = \frac{90^\circ}{3} = 30^\circ \qquad (3)$$

c) seguidamente se divide cada cuadrante en tres partes iguales, por resultar así de la expresión (3) y se numeran las divisiones obtenidas, a partir del semieje positivo polar a quien corresponde 0, obteniéndose así los valores mínimos y máximos de $\rho = f(\omega)$; d) en cuarto lugar, se determina el número de hojas de la rosa que, por ser $m = 3$ impar, resulta 3 hojas; e) finalmente se diagraman las hojas. Como a un máximo positivo (+1) se le opone un máximo negativo (-1), al representarse la hoja del lado opuesto resulta la correspondiente al máximo negativo (-1) superpuesta con la de su máximo positivo (+1).-

Si la amplitud k es negativa ($k < 0$), efectuada la división de los cuadrantes de acuerdo con la expresión (2), la numeración correlativa varía. A partir del semieje positivo de abscisas comienza con 0, continuando en sentido contrario a la marcha de las agujas del reloj con -1, 0, 1, 0, -1, etc.-



- figura VI.9 -

En la figura VI.9, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = -3 \text{ sen } 4\omega$$

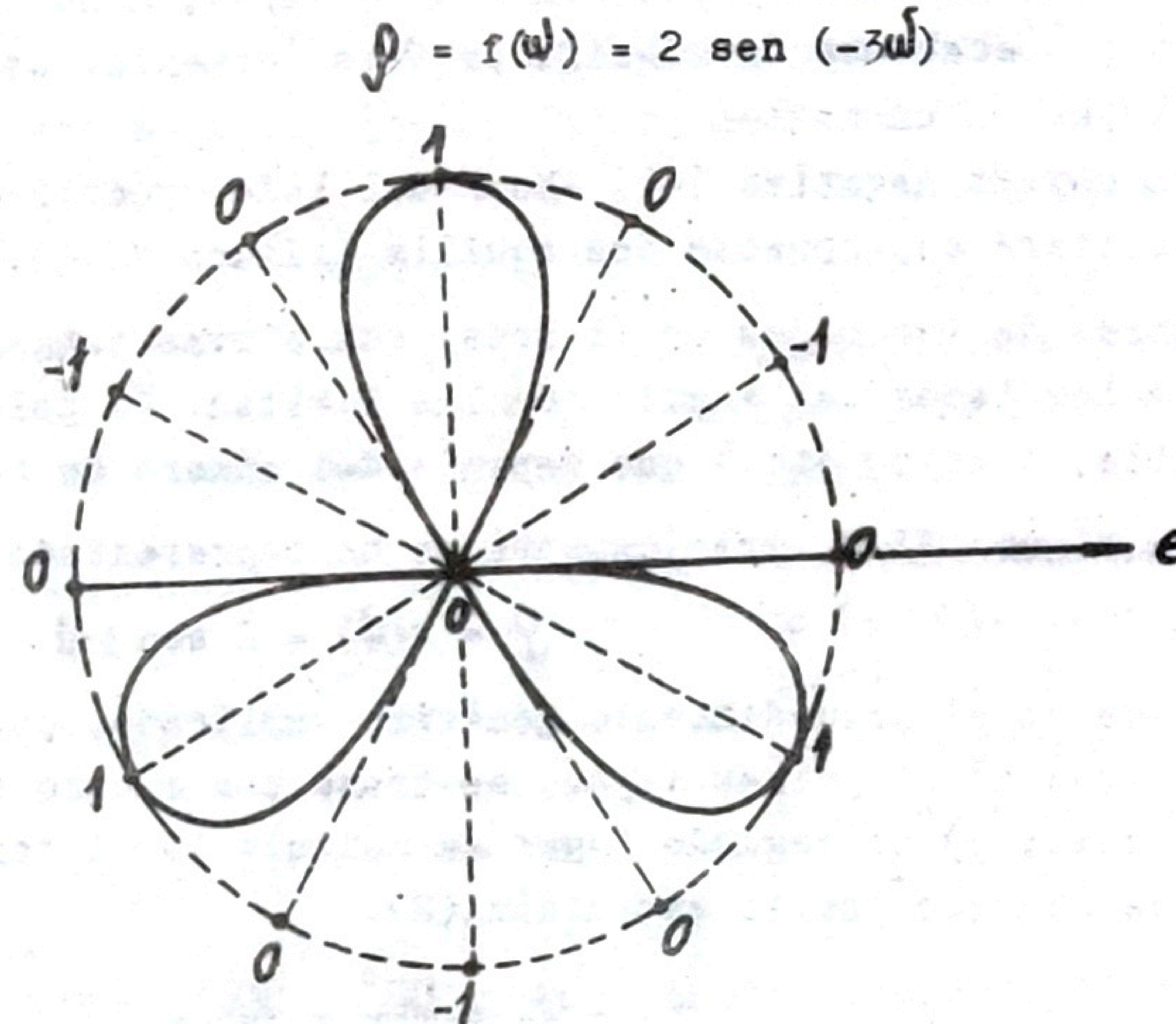
obteniéndose una rosa de 8 hojas, por ser m par.-

Si la pulsación m es negativa ($m < 0$), efectuada la división de los cuadrantes de acuer

do con la expresión (2), el sentido de la numeración correlativa es el que varía. A partir del semieje positivo polar siempre comienza con 0 continuando en el sentido de marcha de las agujas del reloj, con 1, 0, -1, 0, 1, etc.

En la figura VI.10, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = 2 \text{ sen } (-3\omega)$$



- figura VI.10 -

3.- Si la fase inicial $\alpha \neq 1$, resulta la función tipo:

$$\rho = f(\omega) = k \text{ sen}(m\omega + \alpha)$$

cuya representación gráfica es una rosa de 2m o m hojas, según sea la pulsación m par o impar, respectivamente.-

El razonamiento efectuado para a.2) del presente parágrafo, en el caso de la función $\rho = f(\omega) = k$ sen $m\omega$, es totalmente válido ahora. La forma general de las hojas de las rosas no se alteran, sino tan solo un desplazamiento $\delta = -\frac{\alpha}{m}$ respecto del semieje positivo polar, acusado por la presencia de la constante α, sufre la función.-

En la figura VI.11, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = -3 \text{ sen}(2\omega + \frac{\pi}{3})$$

donde la amplitud $k = -3$, la pulsación $m = 2$ par y la fase inicial $\alpha = \frac{\pi}{3}$, resultando por tanto su defasaje $\delta = -\frac{\pi}{6}$.-

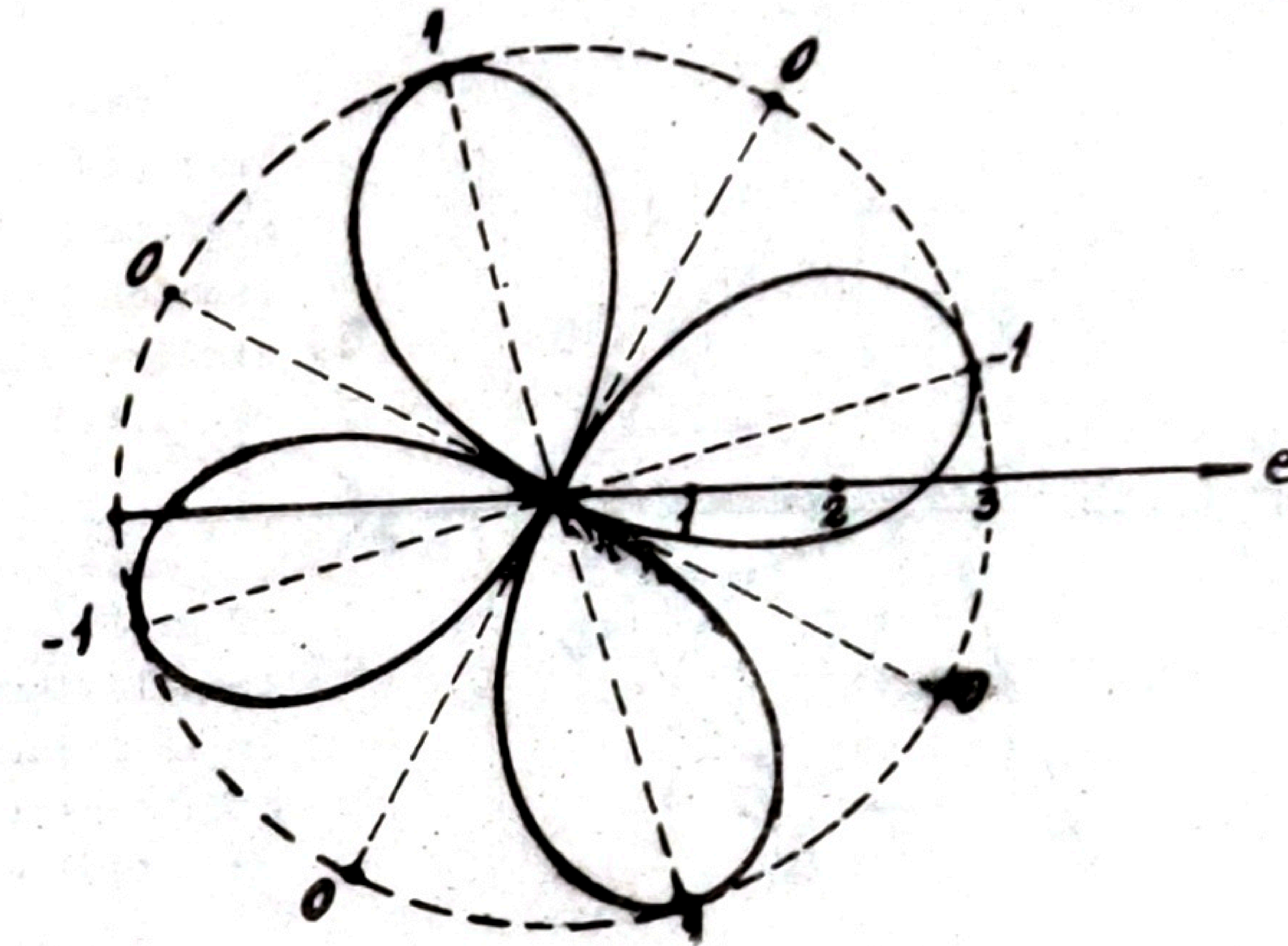
La rosa es de 4 hojas, por ser la pulsación par. Se hace notar que el signo negativo de la amplitud no hace variar la posición de la rosa cuando la pulsación es par porque al oponerse máximos de igual signo, corresponde una hoja de cada lado.-

b) FUNCION: $\rho = f(\omega) = k \cos(m\omega + \alpha)$.- 1. De esta función su expresión más simple viene dada así:

$$\rho = f(\omega) = k \cos\omega \qquad (4)$$

obtenida si $m = 1$ y $\alpha = 0$.-

La función de la expresión (4) es uniforme porque a cada valor de ω le corresponde un solo valor de $\rho = f(\omega)$.-

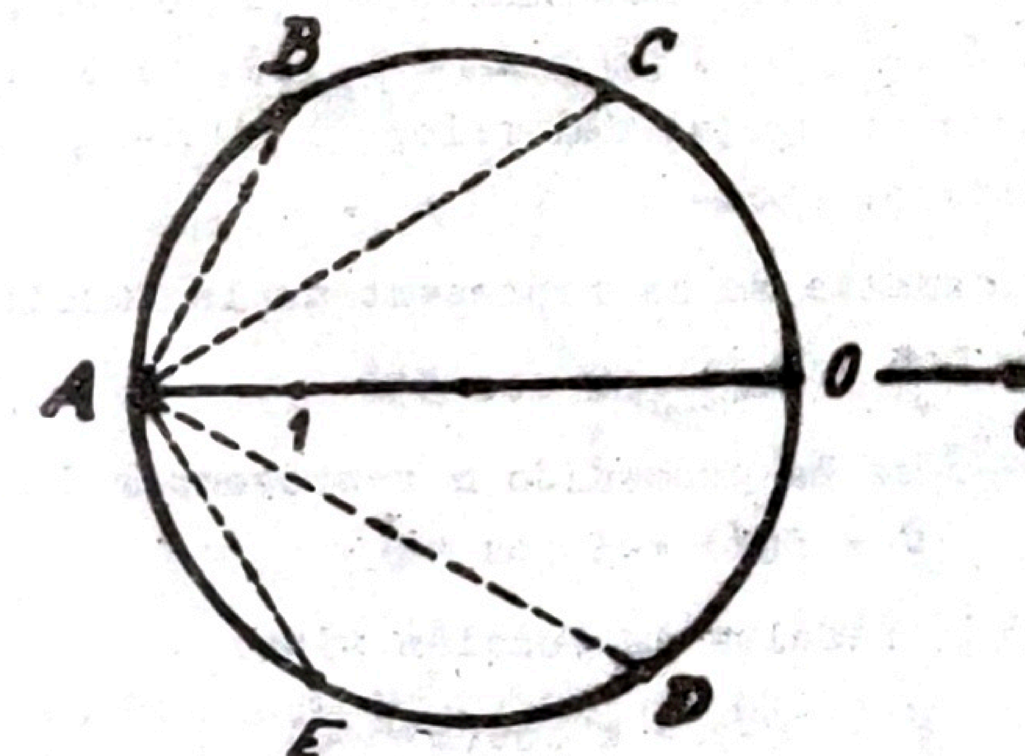


- figura VI.11 -

Sea la amplitud k positiva ($k > 0$). Formemos un cuadro de referencia, dando a ω valores en los cuadrantes primero y segundo, y representemos gráficamente los puntos obtenidos (figura VI.12), resulta:

ω	0	30	60	90	120	150	180
$\rho = f(\omega) = k \cos\omega$	k	0,87k	0,5k	0	-0,5 k	-0,87 k	k
	A	B	C	O	D	E	A

Para valores de ω comprendidos en los cuadrantes tercero y cuarto resultan los mismos valores de $\rho = f(\omega) = k\cos\omega$, pero negativos; ahora, como los valores negativos del módulo en el sistema de representación en coordenadas polares se trazan en las semirrectas opuestas sobre la que se miden, resultan entonces éstos coincidentes con aquéllos, obteniéndose así también los puntos A, B, C, O, D, E, A (figura VI.12).-

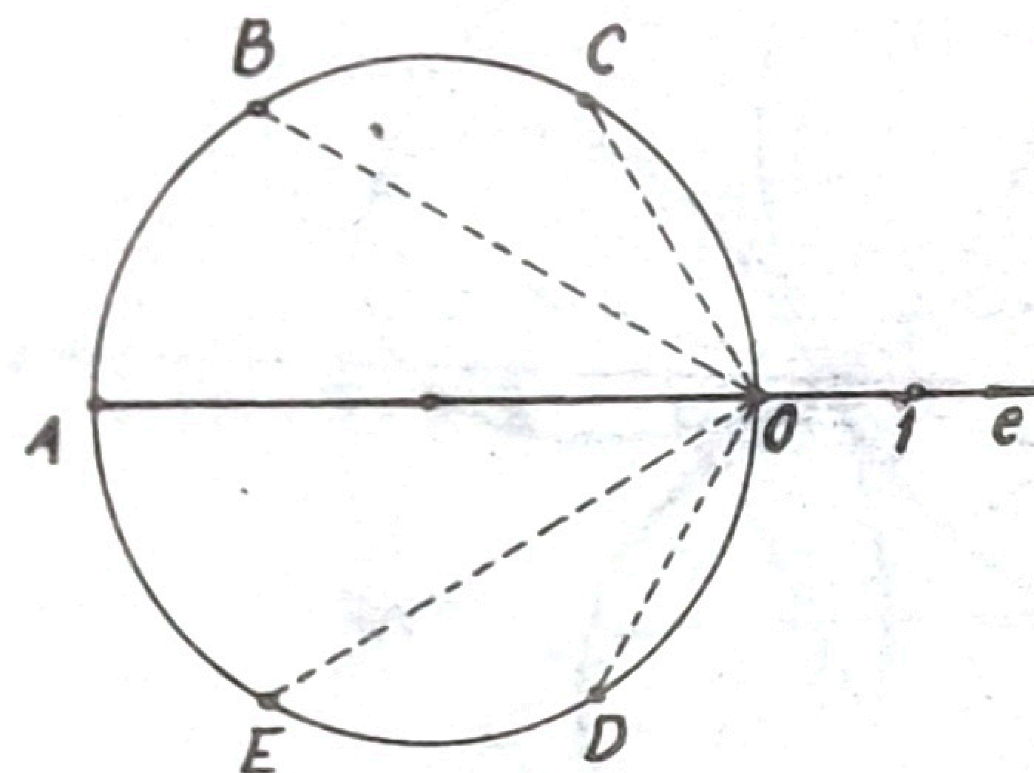


- figura VI.12 -

Unidos los puntos obtenidos, por representación gráfica de la función $\rho = f(\omega) = k \cos\omega$ con $k > 0$, resulta una circunferencia de diámetro $\overline{OA} = k$, o sea de radio $r = \frac{k}{2}$.-

Se observa que la figura VI.12 con respecto a la figura VI.6, correspondiente a la representación gráfica de la función $\rho = f(\omega) = k \operatorname{sen}\omega$, se encuentra tan solo girada en $\frac{\pi}{2}$.-

Para la constante k negativa ($k < 0$) la representación gráfica (figura VI.13) de la función $\rho = f(\omega) = k \cos\omega$ es simétrica de la anterior (figura VI.12), con respecto al polo.-



- figura VI.13 -

Mientras en la figura VI.12 graficamente se ha representado la función $\rho = f(\omega) = 4\cos\omega$; en la figura VI.13 se ha procedido a representar la función $\rho = f(\omega) = -4 \cos\omega$.-

2.- Si la pulsación $m \neq 1$ y positivo, la expresión (4) se transforma así:

$$\rho = f(\omega) = k \cos m\omega$$

Razonando como se ha hecho para el caso de la función $\rho = f(\omega) = k \operatorname{sen} m\omega$, se obtiene una rosa de 2m o m hojas según que la pulsación m sea par o impar, respectivamente.-

Tan solo se advierte una diferencia en la numeración correlativa de las divisiones de los cuadrantes, a partir del semieje positivo polar y en sentido contrario de marcha de las agujas de un reloj; cuando $\omega = 0$ es $\cos 0 = 1$ y $\rho = f(\omega)$ resulta un valor máximo, en vez de mínimo como antes, y por lo tanto a partir del citado semieje debe numerarse (1 , 0 , -1 , 0 , 1 , 0, ...), si k es positivo ($k > 0$); ó (-1 , 0 , 1 , 0 , -1 , 0 , ...), si k es negativo ($k < 0$); o en sentido de marcha de agujas del reloj (1 , 0 , -1 , 0 , 1 , 0, ...), si m es negativo y k positivo, etc.-

En la figura VI.14-a, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = 2 \cos 3\omega$$

mientras que en la figura VI.14-b se ha procedido a representar la función:

$$\rho = f(\omega) = -3 \cos 4\omega$$

3.- Si la fase inicial $\alpha \neq 1$, resulta la función tipo:

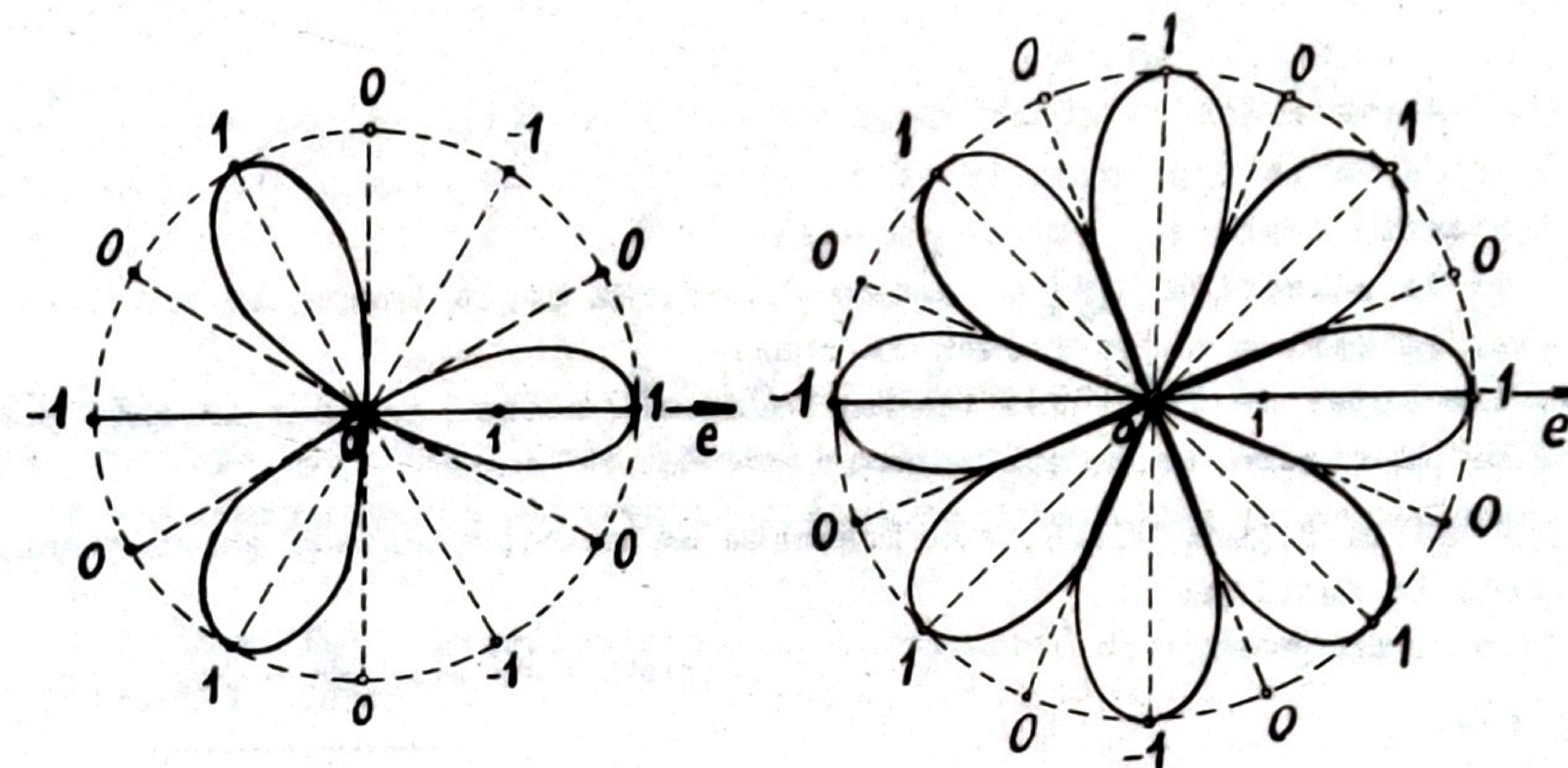
$$\rho = f(\omega) = k \cos(m\omega + \alpha)$$

cuya representación gráfica no difiere de la anterior, sino tan solo por el corrimiento inicial $\delta = -\frac{\alpha}{m}$.-

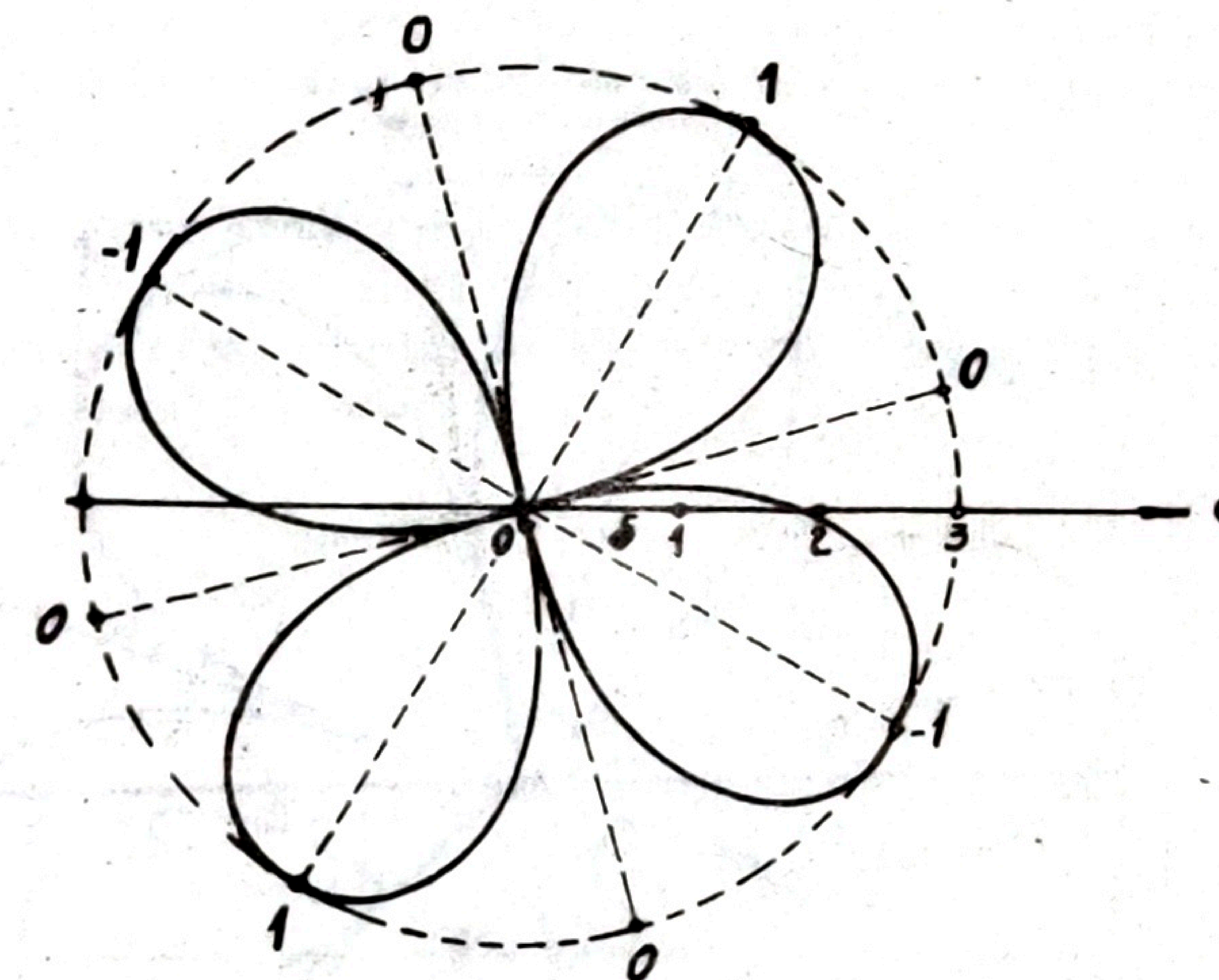
En la figura VI.15, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = -3 \cos(2\omega + \frac{\pi}{3})$$

donde la amplitud $k = -3$, la pulsación $m = 2$ par y la fase inicial $\alpha = \frac{\pi}{3}$, resultando por tanto su defasaje $\delta = -\frac{\pi}{6}$ y la rosa de 4 hojas.-



- figura VI.14 -



- figura VI.15 -

c) FUNCION: $\rho^2 = f(\omega) = k^2 \operatorname{sen}(m\omega + \alpha)$.- La citada expresión también puede escribirse:

$$\rho = f(\omega) = k \sqrt{\operatorname{sen}(m\omega + \alpha)}$$

según sea $m = 1$ ó $m \neq 1$ y positivo con $\alpha = 0$ y $\alpha \neq 0$, es decir según resulten respectivamente las funciones:

$$\rho = f(\omega) = k\sqrt{\operatorname{sen}\omega} \;;\quad \rho = f(\omega) = k\sqrt{\operatorname{sen} m\omega} \;;$$
$$\rho = f(\omega) = \sqrt{\operatorname{sen}(m\omega + \alpha)}$$

lo dicho en a.1), a.2) y a.3) del presente parágrafo es válido ahora, si bien deben tenerse en cuenta las siguientes reglas:

1. a máximo positivo corresponden dos hojas opuestas, debido al doble signo antepuesto al radical;
2. a máximo negativo no existe representación gráfica, porque la raíz cuadrada de la expresión de la función carece de sentido en el campo de los números reales;
3. si la pulsación m es un número impar, 2m hojas forman la rosa; en cambio si es par, m hojas forman la rosa;
4. las hojas de las rosas tienen forma más ancha, por ser la raíz cuadrada de un número menor que 1 mayor que él.-

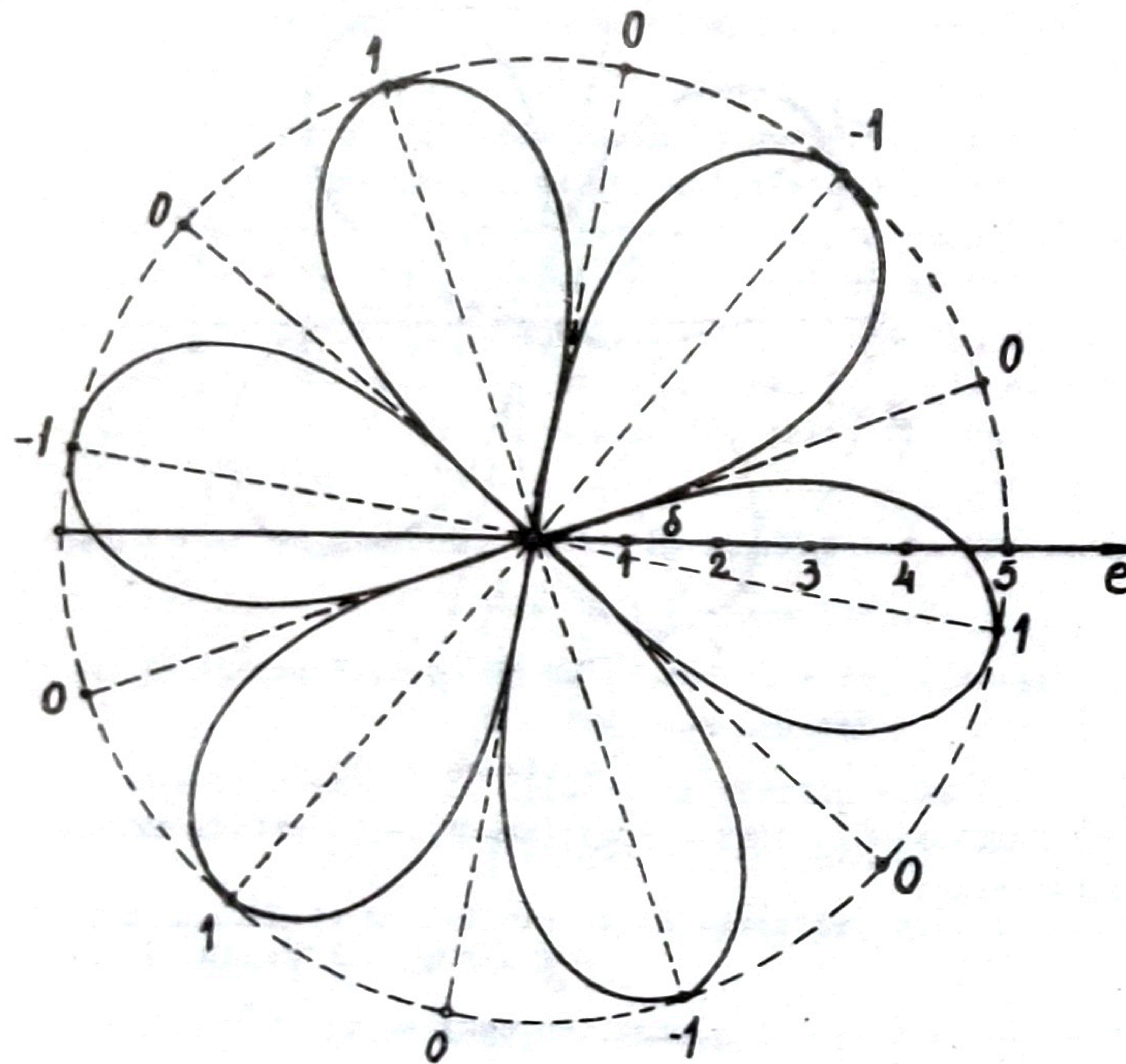
En la figura VI.16, graficamente se ha representado en coordenadas polares la función:

$$\rho^2 = f(\omega) = 25 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3} - 3\omega\right)$$

o sea:

$$\rho = f(\omega) = 5\sqrt{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 3\omega\right)}$$

resultando la amplitud $k = \pm 5$; la pulsación $m = -3$ y la fase inicial $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Se ha obtenido una rosa de 6 hojas, efectuándose la numeración de las divisiones a partir del valor $\delta = 20°$ en el sentido de marcha de las agujas del reloj.-



- figura VI.16 -

d) FUNCION: $\rho^2 = f(\omega) = k^2\cos(m\omega+\alpha)$.- Esta expresión también puede escribirse:

$$\rho = f(\omega) = k\sqrt{\cos(m\omega+\alpha)}$$

según sea $m = 1$ ó $m \neq 1$ y positivo con $\alpha = 0$, y $\alpha \neq 0$, es decir según resulten respectivamente las funciones:

$$\rho = f(\omega) = k\sqrt{\cos\omega}$$
$$\rho = f(\omega) = k\sqrt{\cos m\omega}$$
$$\rho = f(\omega) = k\sqrt{\cos(m\omega+\alpha)}$$

lo dicho en b.1), b.2) y b.3) del presente parágrafo es válido ahora, si bien deben tenerse en cuenta las reglas prácticas enunciadas precedentemente en c).-

En la figura VI.17, graficamente se ha procedido a representar en coordenadas polares la función:

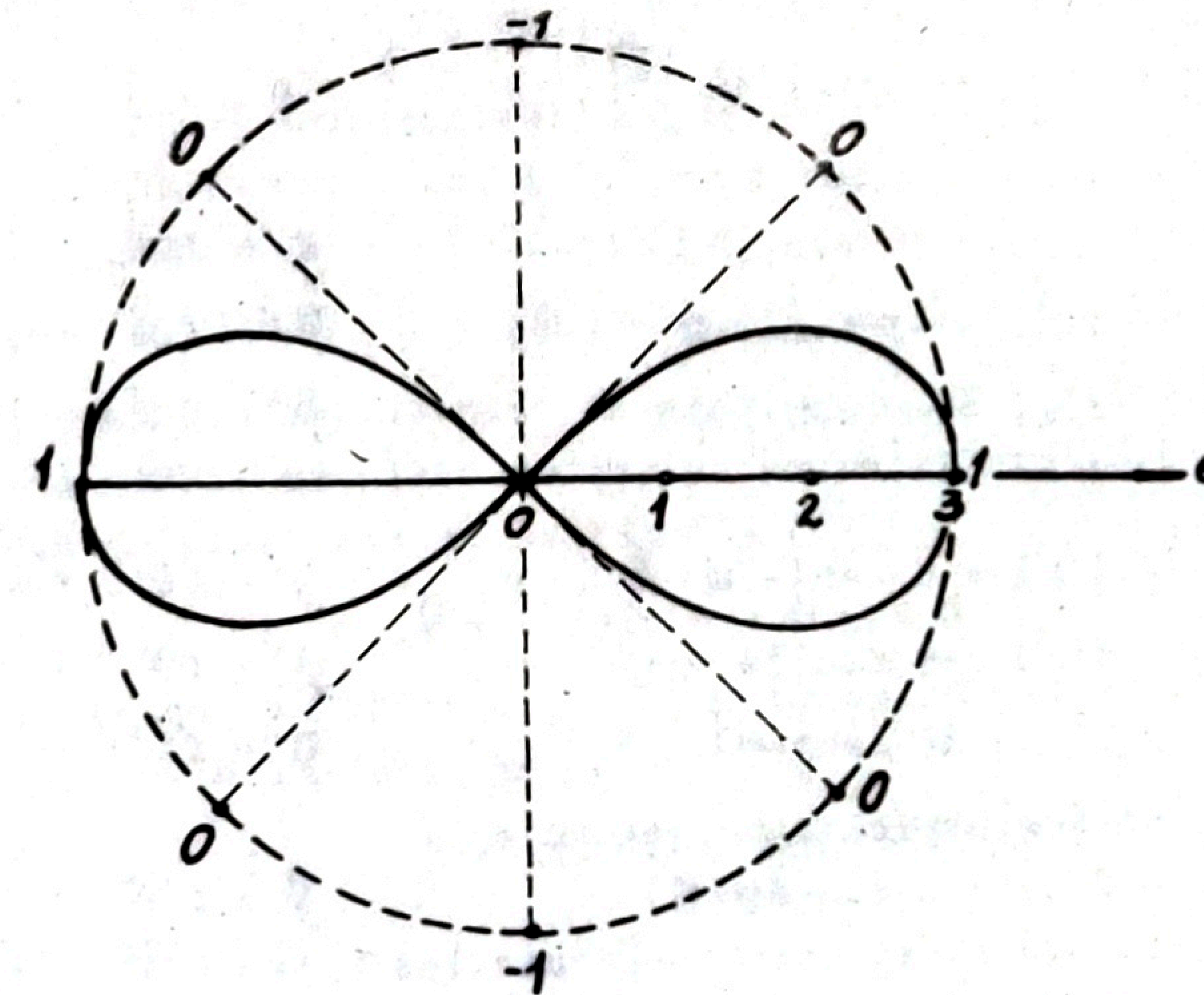
$$\rho^2 = f(\omega) = 9\cos 2\omega$$

o sea:

$$\rho = f(\omega) = 3\sqrt{\cos 2\omega}$$

resultando la amplitud $k = \pm 3$; la pulsación $m = 2$ y la fase inicial $\alpha = 0$. Se ha obtenido una rosa de 2 hojas, llamada lemniscata de BERNOUILLI, efectuándose la numeración de las divisiones en sentido contrario a la marcha de agujas del reloj.

Geométricamente puede definirse la función dada como el lugar geométrico de todos los puntos de un plano para los cuales el producto de sus distancias a dos puntos fijos es constante. La superficie encerrada por la curva es igual al cuadrado del lado k.-



- figura VI.17 -

EJERCICIOS: a) Representar las siguientes funciones en coordenadas polares:

$\rho = f(\omega) = 3 \operatorname{sen}\omega$; $\rho = f(\omega) = \frac{5}{2}\cos\omega$

$\rho = f(\omega) = 4 \operatorname{sen}(-\omega)$; $\rho = f(\omega) = -\frac{3}{5}\cos\omega$

$\rho = f(\omega) = -5 \operatorname{sen}(-\omega)$; $\rho = f(\omega) = 7\cos(-\omega)$

$\rho = f(\omega) = -2 \operatorname{sen}\omega$; $\rho = f(\omega) = -3\cos(-\omega)$

b) Idem a):

$\rho = f(\omega) = 5 \operatorname{sen} 3\omega$; $\rho = f(\omega) = -\frac{7}{2}\cos(-3\omega)$

$\rho = f(\omega) = -2 \operatorname{sen} 5\omega$; $\rho = f(\omega) = \frac{9}{5}\cos(-5\omega)$

$\rho = f(\omega) = 4 \operatorname{sen}(-\omega)$; $\rho = f(\omega) = -\frac{15}{4}\cos 5\omega$

$\rho = f(\omega) = -3 \operatorname{sen}(-5\omega)$; $\rho = f(\omega) = \frac{1}{3}\cos 3\omega$

c) Idem a):

$\rho = f(\omega) = -\frac{4}{5} \operatorname{sen} 2\omega$; $\rho = f(\omega) = 3\cos(-4\omega)$

$\rho = f(\omega) = \frac{9}{2} \operatorname{sen} 4\omega$; $\rho = f(\omega) = -6\cos(-6\omega)$

$\rho = f(\omega) = -\frac{7}{3} \operatorname{sen}(-6\omega)$; $\rho = f(\omega) = 5\cos 4\omega$

$\rho = f(\omega) = \frac{2}{7} \operatorname{sen}(-2\omega)$; $\rho = f(\omega) = -2\cos 2\omega$

d) Idem a):

$\rho = f(\omega) = -4 \operatorname{sen} \frac{2}{3}\omega$; $\rho = f(\omega) = -7\cos \frac{1}{4}\omega$

$\rho = f(\omega) = -3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega$; $\rho = f(\omega) = 5\cos \frac{1}{3}\omega$

$\rho = f(\omega) = 2 \operatorname{sen} \frac{3}{4}\omega$; $\rho = f(\omega) = -6\cos \frac{1}{5}\omega$

$\rho = f(\omega) = -5 \operatorname{sen} \frac{2}{5}\omega$; $\rho = f(\omega) = 3\cos \frac{2}{5}\omega$

e) Idem a:

$\rho = f(\omega) = -2 \operatorname{sen}\left[3\omega - \frac{\pi}{2}\right]$; $\rho = f(\omega) = -4\left[\cos 2\omega + \frac{2\pi}{3}\right]$

$\rho = f(\omega) = 6 \operatorname{sen}\left[-2\omega + \pi\right]$; $\rho = f(\omega) = 5\left[\cos 5\omega - 2\pi\right]$

$\rho = f(\omega) = 3 \operatorname{sen}\left[4\omega - \frac{\pi}{3}\right]$; $\rho = f(\omega) = -5\left[\cos -3\omega - \frac{3\pi}{4}\right]$

$\rho = f(\omega) = -7 \operatorname{sen}\left[-5\omega + \frac{5\pi}{8}\right]$; $\rho = f(\omega) = 4\left[\cos 4\omega + \frac{2\pi}{3}\right]$

f) Idem a:

$\rho^2 = f(\omega) = 12 \operatorname{sen}(-3\omega)$; $\rho^2 = f(\omega) = 2\cos(-5\omega)$

$\rho^2 = f(\omega) = -3 \operatorname{sen}(-4\omega)$; $\rho^2 = f(\omega) = -36\cos 4\omega$

$\rho^2 = f(\omega) = -4 \operatorname{sen} 5\omega$; $\rho^2 = f(\omega) = 8\cos 3\omega$

g) Idem a:

$\rho^2 = f(\omega) = 6 \operatorname{sen}\left[-2\omega + \frac{\pi}{3}\right]$; $\rho^2 = f(\omega) = -25\left[\cos -3\omega + \frac{2\pi}{3}\right]$

$\rho^2 = f(\omega) = -9 \operatorname{sen}\left[3\omega - \frac{3\pi}{4}\right]$; $\rho^2 = f(\omega) = 7\left[\cos 5\omega + 3\pi\right]$

$\rho^2 = f(\omega) = -16 \operatorname{sen}\left[-4\omega - \frac{4\pi}{3}\right]$; $\rho^2 = f(\omega) = -4\left[\cos 6\omega - \frac{4\pi}{5}\right]$

h) Indicar en las expresiones generales:

$\rho = f(\omega) = k \operatorname{sen}(m\omega + \alpha)$; $\rho = f(\omega) = k\cos(m\omega + \alpha)$

las reglas prácticas para construir las rosas correspondientes.-

i) Idem h) para las expresiones generales:

$\rho^2 = f(\omega) = k^2 \operatorname{sen}(m\omega + \alpha)$; $\rho^2 = f(\omega) = k^2\cos(m\omega + \alpha)$

VI.6.- Suma gráfica de radio-vectores.- El procedimiento para sumar (algebraicamente) radio-vectores esencialmente es análogo al estudiado en el parágrafo V.7 cuando las funciones se representaron graficamente en coordenadas cartesianas, porque, para ello, previa la representación gráfica de las funciones sumandos de que se trate, para un mismo valor numérico del argumento, se suman (algebraicamente) los respectivos módulos obtenidos.-

Conviene aclarar que, cuando un radio-vector tiene sentido contrario al que se está considerando, posee signo negativo para el correspondiente valor numérico del argumento. Asimismo, cabe hacer notar que, si de la representación gráfica de las funciones sumandos surgen curvas que no se representan en algún cuadrante, ello no significa que la función no exista para los correspondientes valores numéricos del argumento en ese cuadrante.- De allí entonces que deba analisarse exhaustivamente la función y representación gráfica con que se trabaja.-

De frecuente aplicación son la cardioide, el Caracol de PASCAL y la circunferencia, obtenidos mediante el método de sumas gráficas (algebraicas) de radio-vectores y que pasamos a estudiar a continuación.-

Llámanse cardioide y Caracol de PASCAL las gráficas de la función:

$$\rho = f(\omega) = a + b\cos\omega \qquad (1)$$

donde a y b son constantes.-

La expresión (1), algebraicamente consta de dos sumandos: $\rho_1 = a$ y $\rho_2 = g(\omega) = b\cos\omega$, cuyas respectivas representaciones gráficas son circunferencias de radio a y diámetro b (figura VI.18).-

Si $a = b$ se obtiene por representación gráfica de la fuhción suma $\rho = f(\omega)$ la cardioide, nombre debido a su semejanza con la forma del corazón. En la figura VI.18-a, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = 4 + 4\cos\omega$$

Si $a > b$ se obtiene por representación gráfica de la función suma $\rho = f(\omega)$ el Caracol de PASCAL con lazo. Así, por ejemplo, en la figura VI.18-b, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = 4 + 2\cos\omega$$

Si $a < b$ se obtiene por representación gráfica de la función suma $\rho = f(\omega)$ el Caracol de PASCAL sin lazo. Ejemplo: en la figura VI.18-c se ha procedido a representar graficamente la función:

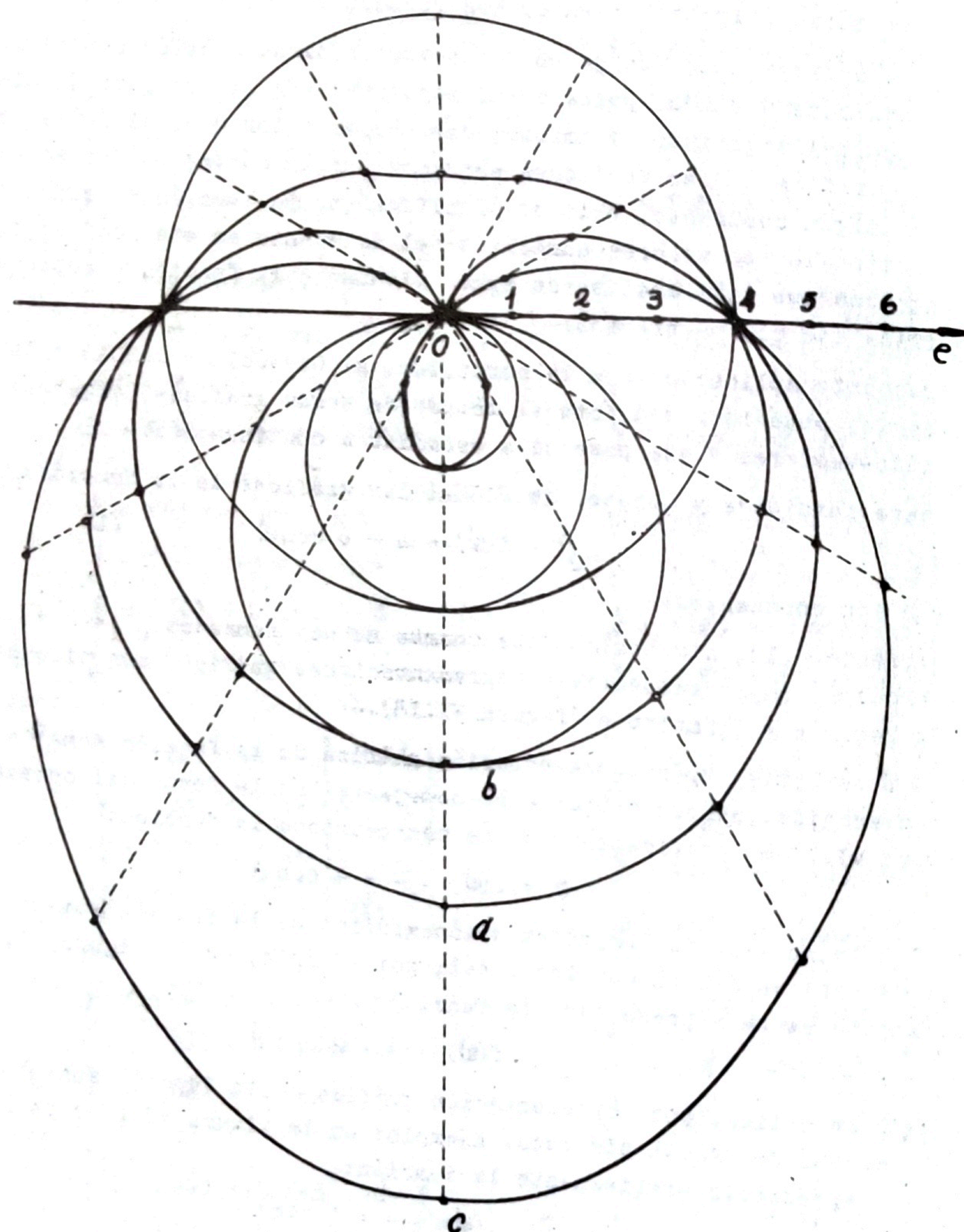
$$\rho = f(\omega) = 4 + 6\cos\omega$$

La circunferencia que se obtiene por suma (algebraica) gráfica de radio-vectores corresponde a la función:

$$\rho = f(\omega) = a \operatorname{sen}\omega + b\cos\omega \qquad (2)$$

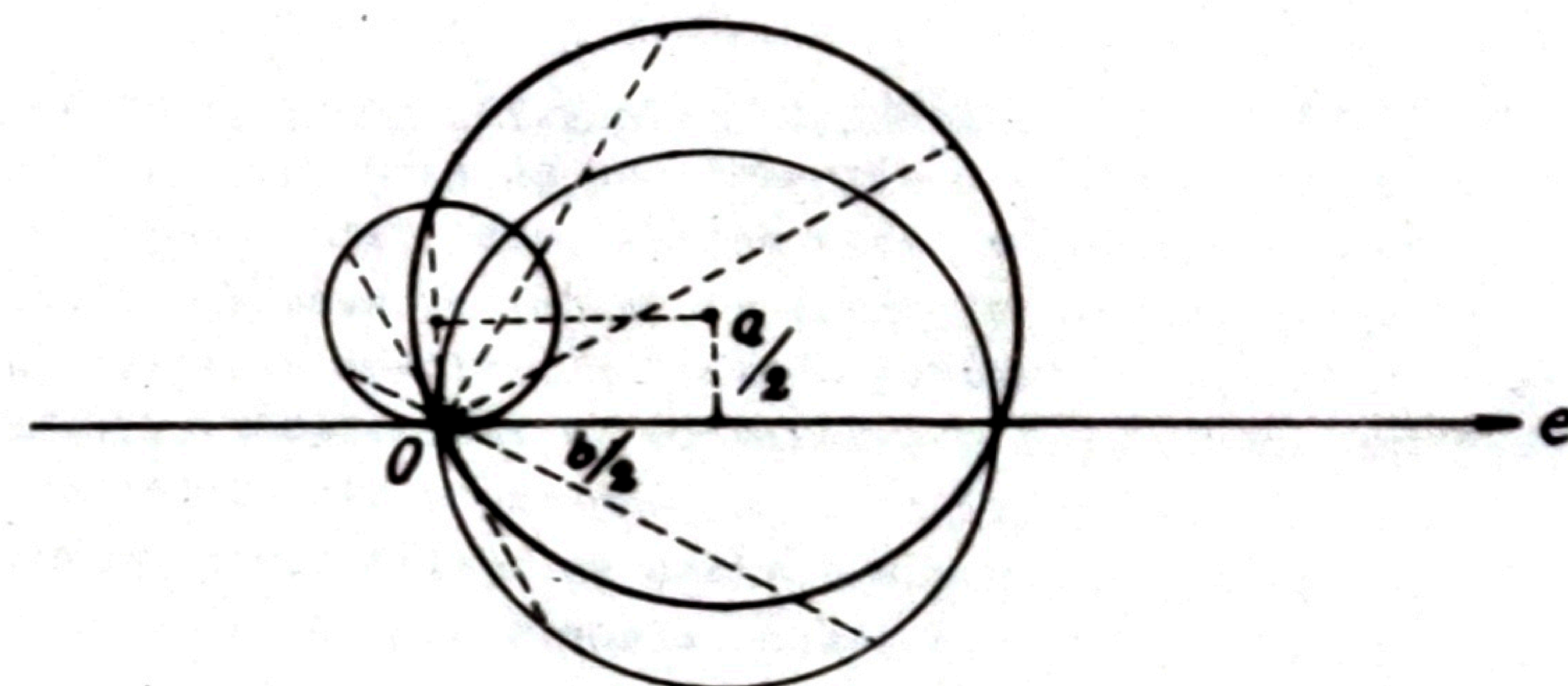
donde a y b son constantes.-

La expresión (2), algebraicamente consta de dos sumandos: $\rho_1 = g(\omega) = a \operatorname{sen}\omega$ y $\rho_2 = h(\omega) = b \operatorname{sen}\omega$, cuyas respectivas representaciones gráficas son circunferencias de radios a y b (figura VI.19); en consecuencia la fun



- figura VI.18 -

ción suma es otra circunferencia cuyo centro, tiene por abscisa la correspondiente al centro de la circunferencia de la función ρ_2 y por ordenada la respectiva al centro de la circunferencia de la función ρ_1, y de radio igual a la distancia entre los centros de cada una de las funciones ρ_1 y ρ_2 sumandos.-



- figura VI.19 -

Ejemplo: en la figura VI.19, graficamente se ha representado la función:

$$\rho = f(\omega) = 2 \operatorname{sen}\omega + 5 \cos\omega$$

EJERCICIOS: a) Representar en coordenadas polares, por suma gráfica de radios vectores, la función:

$$\rho = f(\omega) = a + b \cos\omega$$

para los valores de a y b que se detallan a continuación:

1. a = 4 ; b = 2 ; 4 ; 7 ; 4. a = 7 ; b = -3 ; -7 ; -9
2. a = 5 ; b = -2 ; -5 ; -7 ; 5. a = -8 ; b = -4 ; -8 ; -11
3. a = -6 ; b = 3 ; 6 ; 8 ; 6. a = 9 ; b = 4 ; 9 ; 11

b) Idem a) para la función:

$$\rho = f(\omega) = a \operatorname{sen}\omega + b \cos\omega$$

para los valores de a y b que se detallan a continuación:

1. a = -4 ; b = 9 ; 4. a = 5 ; b = -4
2. a = -2 ; b = -5 ; 5. a = 3 ; b = -8
3. a = 2 ; b = 7 ; 6. a = -9 ; b = -6

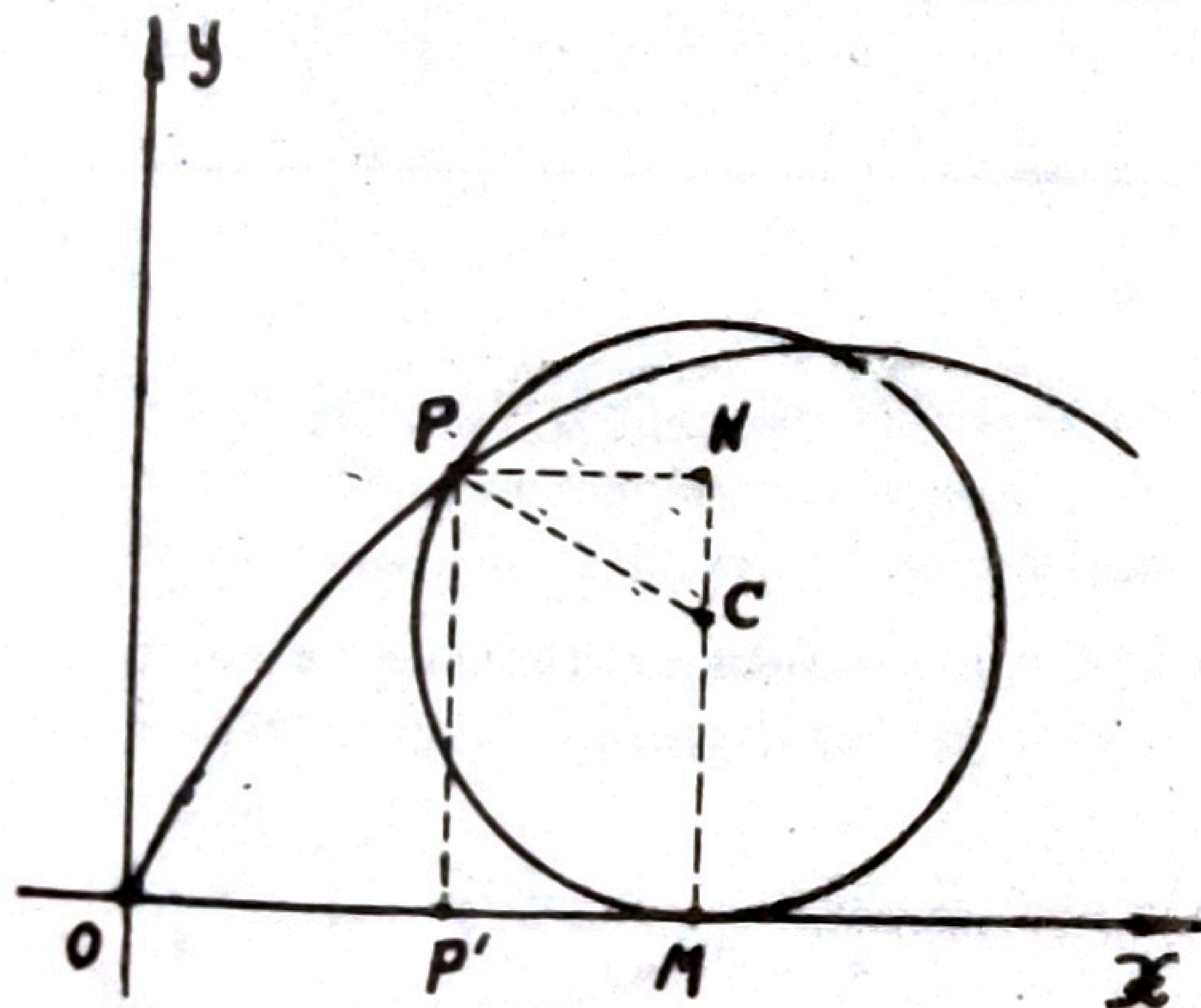
CAPITULO VII

FUNCIONES PARAMETRICAS

VII.1.- **Naturaleza del problema a estudiar.**- En las funciones estudiadas se aprecia la existencia de una relación directa entre las variables independiente y dependiente; pero, muchas veces es útil expresar la relación de dependencia entre esas variables en forma indirecta, mediante el empleo de una tercer variable auxiliar t llamada parámetro. Resultan entonces funciones paramétricas, definidas en el parágrafo I.5, objeto del presente capítulo, y cuyos tipos más preciados lo constituyen las funciones que representan las curvas cicloidales, es decir las engendradas por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia o sobre una recta.-

En los parágrafos III.13 y 14, vimos el procedimiento general que permitía obtener la gráfica de una función paramétrica y su aplicación particular para el caso de la recta, respectivamente.-

VII.2.- **Cicloides.**- La cicloide es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin resbalar, es decir de modo que cada segmento de recta es igual al arco correspondiente.-



- figura VII.1 -

Sea (figura VII.1) una circunferencia de centro C y radio r, donde P(x , y) es un punto de ella. Al girar la circunferencia sobre el eje de abscisas, sin resbalar, resultará engendrada la cicloide. Para obtener sus ecuaciones tomemos el punto de partida O como origen de coordenadas. Después de girar la circunferencia un ángulo t, el punto P que describe la cicloide tendrá las siguientes coordenadas (puesto que $\overline{OM} = \text{arco } \overset{\frown}{MP} = rt$),

$$\begin{cases} x = OM - MP' = rt - r \text{ sen } t \\ y = CM + CH = r - r \cos t \end{cases}$$

y por lo tanto las ecuaciones de la cicloides serán:

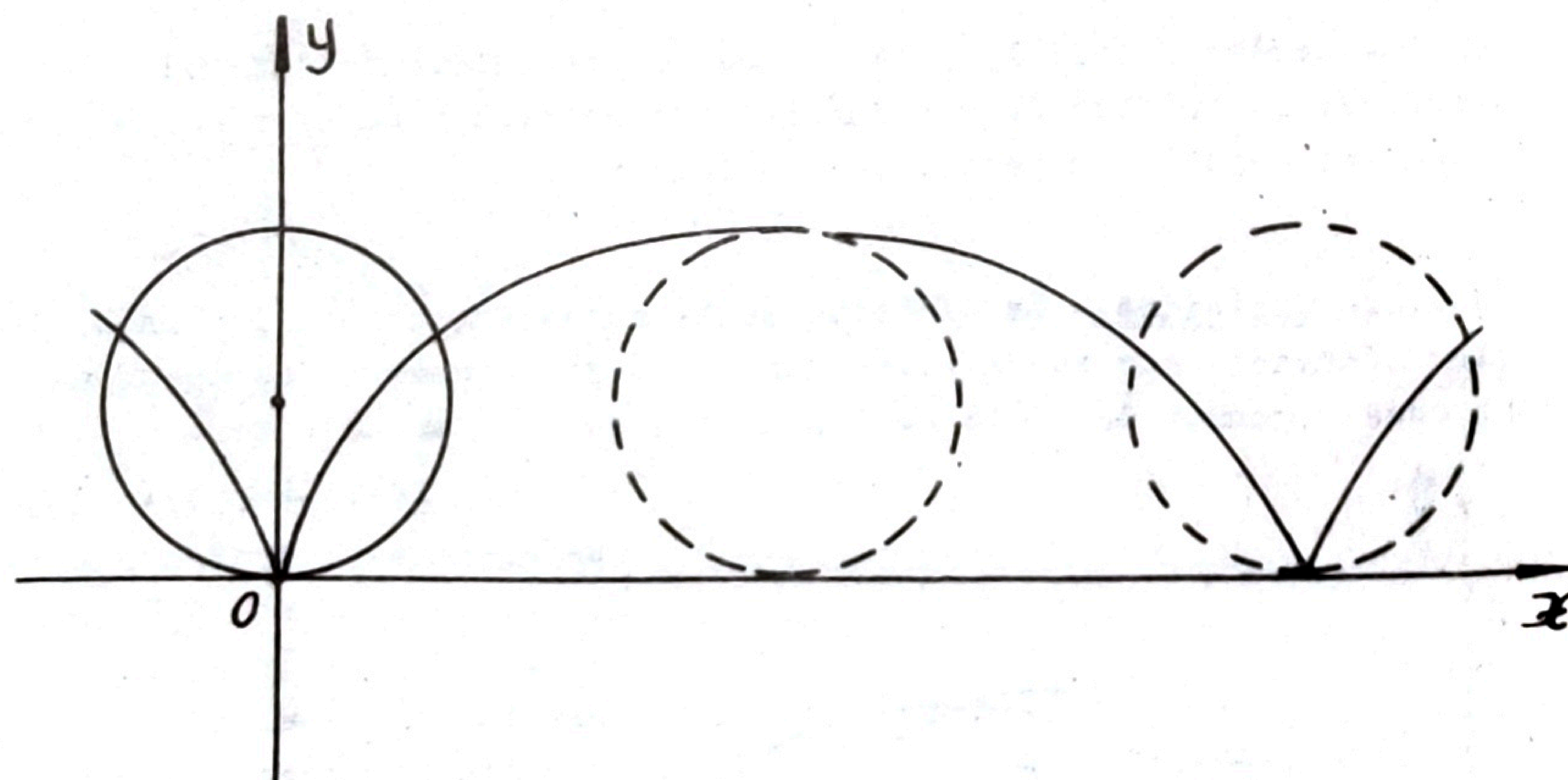
$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen } t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (2)$$

Se pueden considerar cicloides más generales tomando como punto generador uno P que no esté sobre la circunferencia que gira, sino a una distancia b del centro. Las ecuaciones paramétricas en este caso se obtienen igual que antes, con solo observar que en las relaciones (1) es $\overline{P'M} = b \,\text{sen}\, t$ y $\overline{CH} = b \cos t$. Las ecuaciones resultantes son por tanto:

$$\begin{cases} x = r(t - b \text{ sen } t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (3)$$

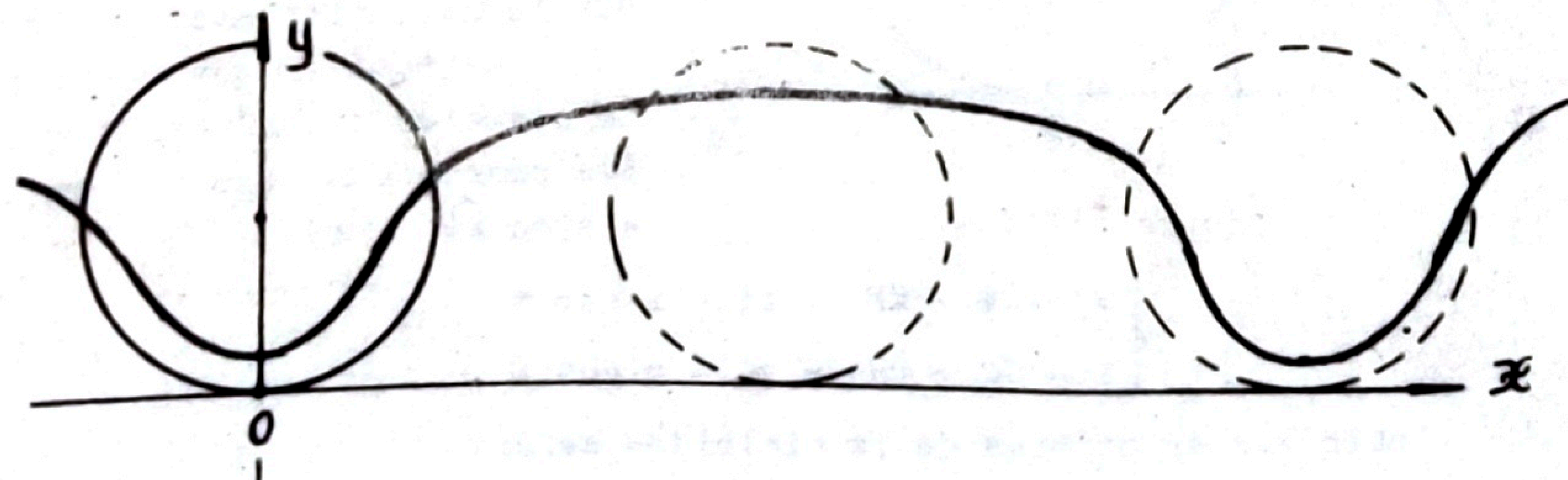
La circunferencia generatriz recibe el nombre de circunferencia móvil, ruleta o rodante, y la recta sobre la cual rueda -eje de abscisas- se llama base. El parámetro t es el ángulo de rodamiento, o sea el ángulo que gira la ruleta a partir de su posición inicial, y según sea el valor de b, resultan tres tipos de cicloides: ordinaria, larga y corta.-

Si b = 1 resulta la expresión (2), el punto P pertenece a la ruleta, obteniéndose la cicloide ordinaria (figura VII.2).-



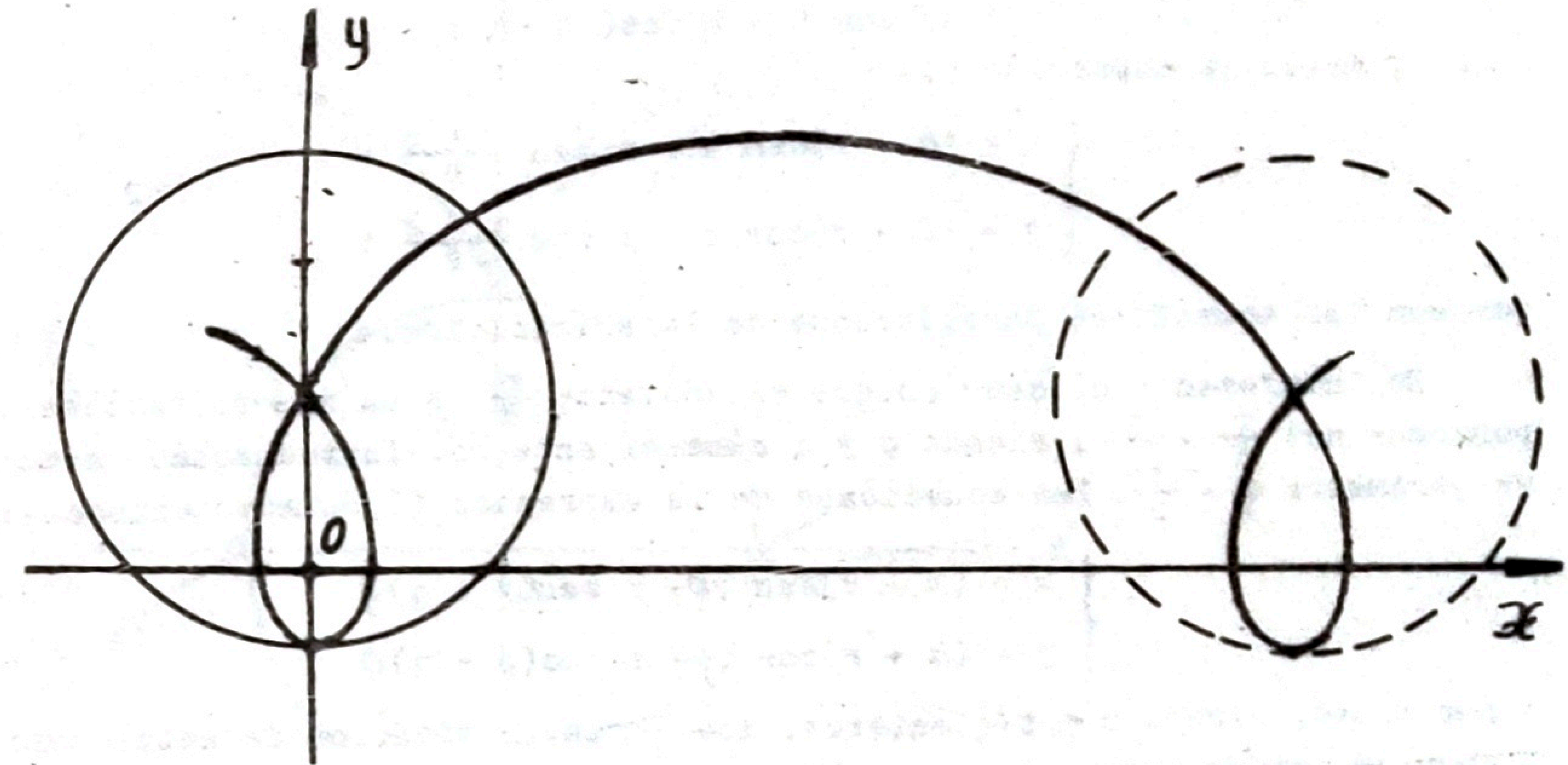
- figura VII.2 -

Si $b < 1$, el punto P es interior a la ruleta, obteniéndose por representación gráfica de su trayectoria la cicloide corta (figura VII.3).-



- figura VII.3 -

Finalmente, si $b > 1$, el punto P es exterior a la ruleta, resultando entonces la cicloide larga.(figura VII.4).-



- figura VII.4 -

EJERCICIOS: a) Representar en coordenadas cartesianas ortogonales la cicloide:

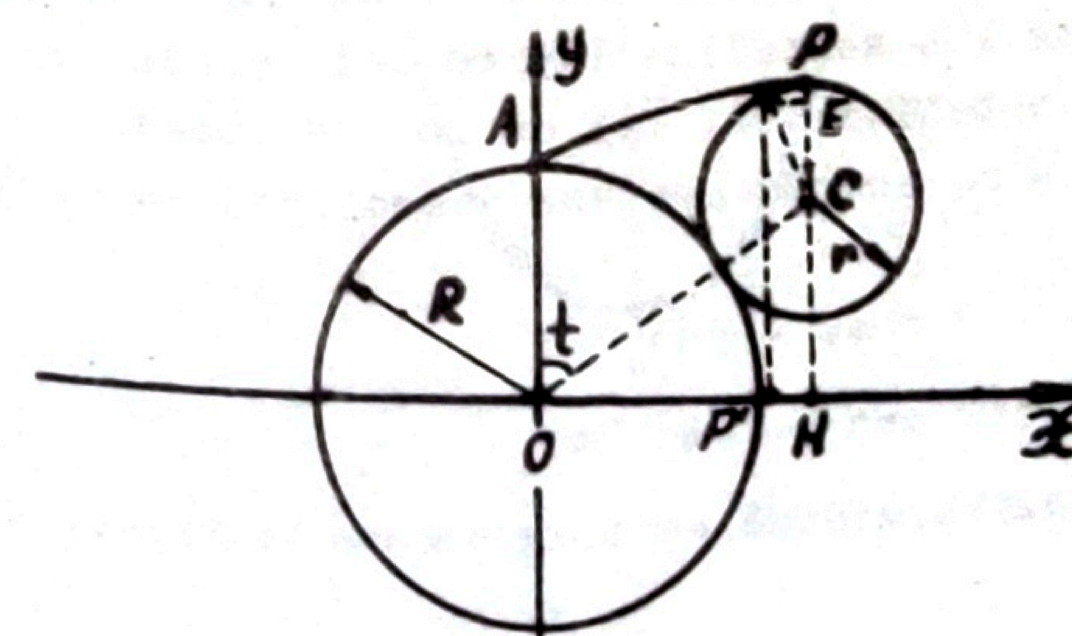
$$\begin{cases} x = r(t - b \text{ sen } t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

para los valores de r y b indicados a continuación:

1. r = 3 ; b = 3 ; 2 ; 6 ;
2. r = 4 ; b = 4 ; 2 ; 6 ;
3. r = 5 ; b = 5 ; 3 ; 8 ;
4. r = 6 ; b = 6 ; 2 ; 9
5. r = 7 ; b = 7 ; 3 ; 9
6. r = 8 ; b = 8 ; 4 ; 12

VII.3.- **Epicicloides.**- La epicicloide es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia, permaneciendo ésta fija, siendo ambas tangentes exteriores.-

También ahora la circunferencia generatriz recibe el nombre de circunferencia móvil, ruleta o rodante, mientras que la circunferencia fija se llama base.-



- figura VII.5 -

Para hallar su ecuación observemos en la figura VII.5 que siendo por hipótesis $\widehat{AM} = \widehat{MP}$, entre el ángulo $t = \widehat{AOC}$ que tomamos como parámetro, y el $\alpha = PCO$ existe la relación:

$$Rt = r\alpha \qquad (1)$$

y además $PCH = t + \alpha$. Según esto se tendrá:

$$x = OH - HP' = OH - EP = (r + R)\ \text{sen}\ t - r\ \text{sen}(t + \alpha)$$

$$y = CH + CE = (r + R) \cos t - r \cos(t + \alpha)$$

o bien, según la expresión (1)

$$\begin{cases} x = (R + r)\text{sen}\ t - r\ \text{sen}\ \dfrac{r + R}{r}\ t \\ y = (R + r)\cos\ t - r\ \cos\ \dfrac{r + R}{r}\ t \end{cases} \qquad (2)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la epicicloide.-

Es interesante el caso en que el cociente $\frac{r}{R}$ es un número racional. Supongamos que $\frac{r}{R} = \frac{p}{q}$, siendo p y q números enteros. Introduzcamos como nuevo parámetro $\varphi = \frac{t}{p}$. Las ecuaciones de la expresión (2) quedan entonces:

$$\begin{cases} x = (R + r)\text{sen}\ p\varphi - r\ \text{sen}(p + q)\varphi \\ y = (R + r)\cos\ p\varphi - r\ \cos(p + q)\varphi \end{cases} \qquad (3)$$

y por tanto, siendo p y p+q enteros, los segundos miembros de estas expresiones se pueden expresar como polinomios en sen y cos . Poniendo entonces tg $\frac{\varphi}{2} = t$ se tiene:

$$\text{sen}\ \varphi = \frac{2t}{1 + t^2} \quad ; \quad \cos\ \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

y por tanto las ecuaciones de la expresión (3) se pueden poner en la forma:

$$F(x , y , t) = 0 \quad ; \quad G(x , y , t) = 0$$

donde F, G, son polinomios en x , y , t. La eliminación del parámetro t conduce entonces a expresar la ecuación de la curva en la forma $f(x , y) = 0$, siendo f un polinomio en x , y. Es decir, la epicicloide resulta una curva algebraica.-

En cambio, si $\frac{r}{R}$ es irracional, ambas curvas dan infinitas vueltas y son trascendentes.-

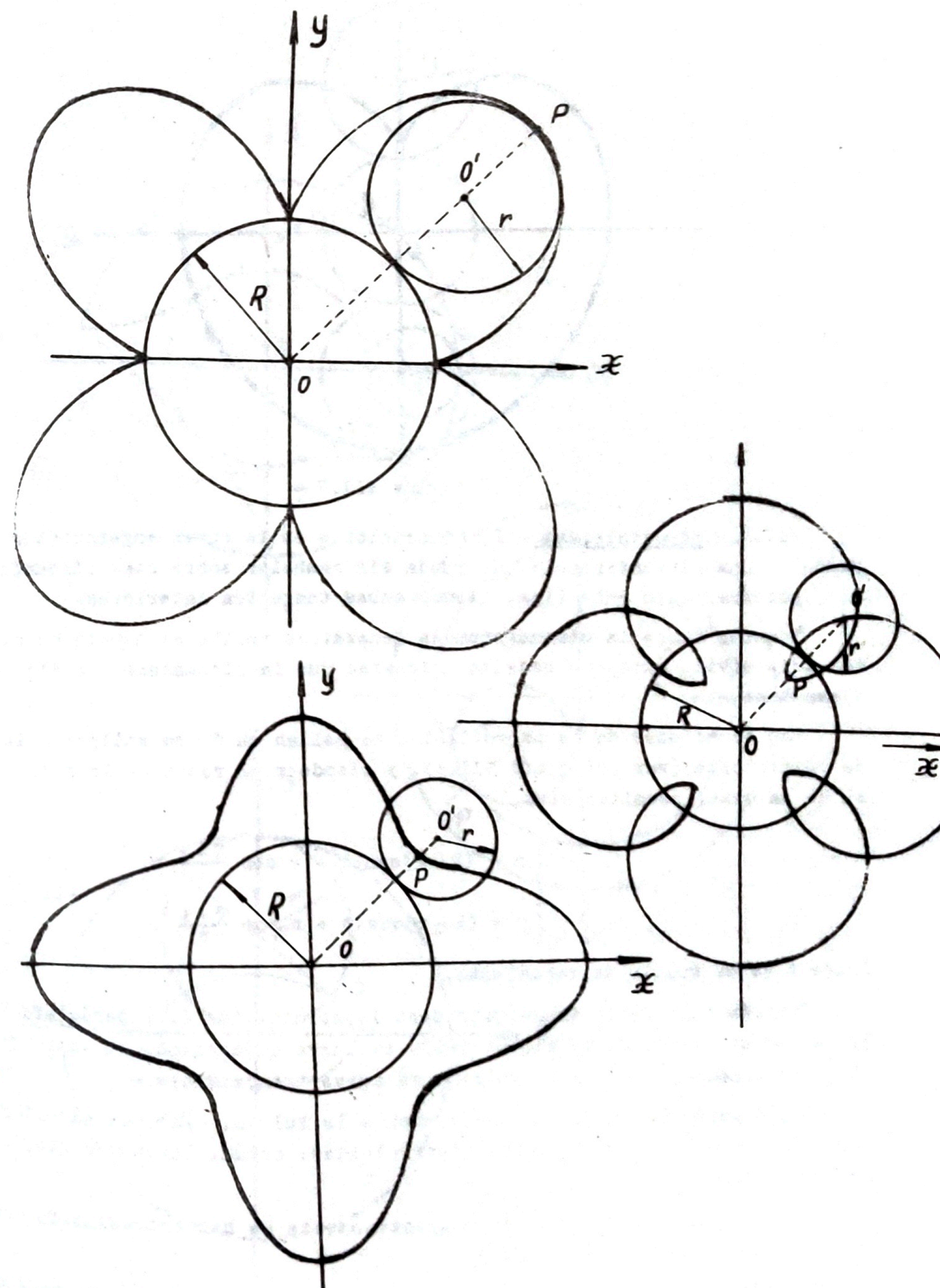
Según pertenezca el punto generador a la ruleta, o le sea interior o exterior, resultan tres tipos de epicicloides: ordinaria, larga y corta.-

En la figura VII.6-a, b, c, respectivamente se han representado gráficamente las epicicloides: ordinaria, larga y corta.-

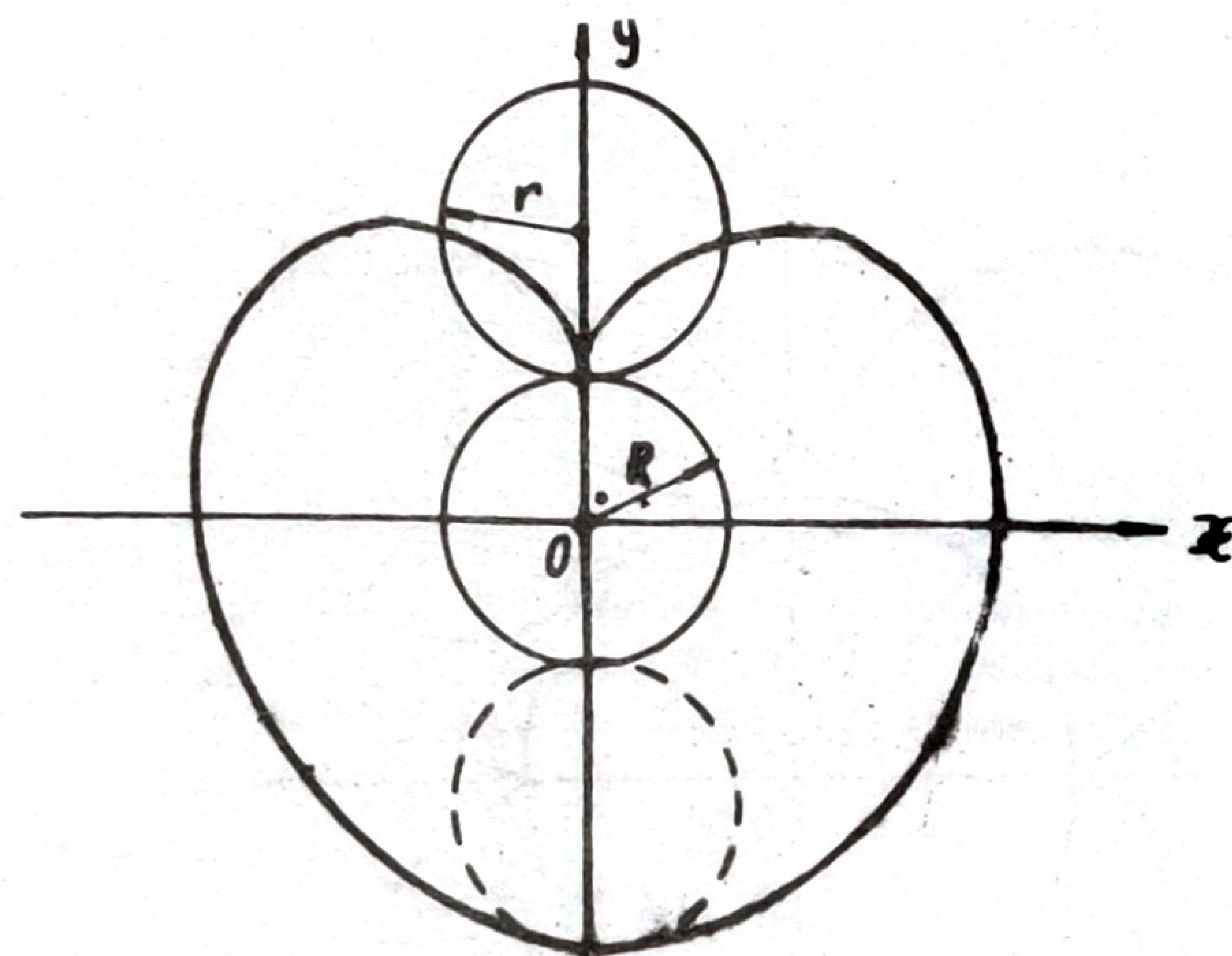
Como se ha dicho la cantidad de ondas que se forman depende, en cada caso, de la relación existente entre los radios de la base (R) y ruleta(r). Cuando las relaciones entre ellos son sencillas las ecuaciones de las expresiones (2) y (3) se simplifican notablemente. Tal es lo que sucede en el caso de la cardioide, obtenida si R=r, con lo que sus ecuaciones se transforman entonces así:

$$\begin{cases} x = r(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = r(2\ \text{sen}\ t - \text{sen}\ 2t) \end{cases}$$

La representación gráfica del cardioide se aprecia en la figura VII.7.-



- figura VII.6



- figura VII.7 -

VII.4.- Hipocicloides.- La hipocicloide es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia, permaneciendo ésta fija, siendo ambas tangentes interiores.-

También ahora la circunferencia generatriz recibe el nombre de circunferencia móvil, ruleta o rodante, mientras que la circunferencia fija se llama base.-

Las ecuaciones de la hipocicloide se hallan en forma análoga a las de la epicicloide (ver parágrafo VII.3), y siendo r el radio de la ruleta y R el de la base, resultan ser:

$$\begin{cases} x = (R-r)\,\text{sen}\; t - r\;\text{sen}\;\frac{R-r}{r}\,t \\ y = (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}\,t \end{cases} \qquad (1)$$

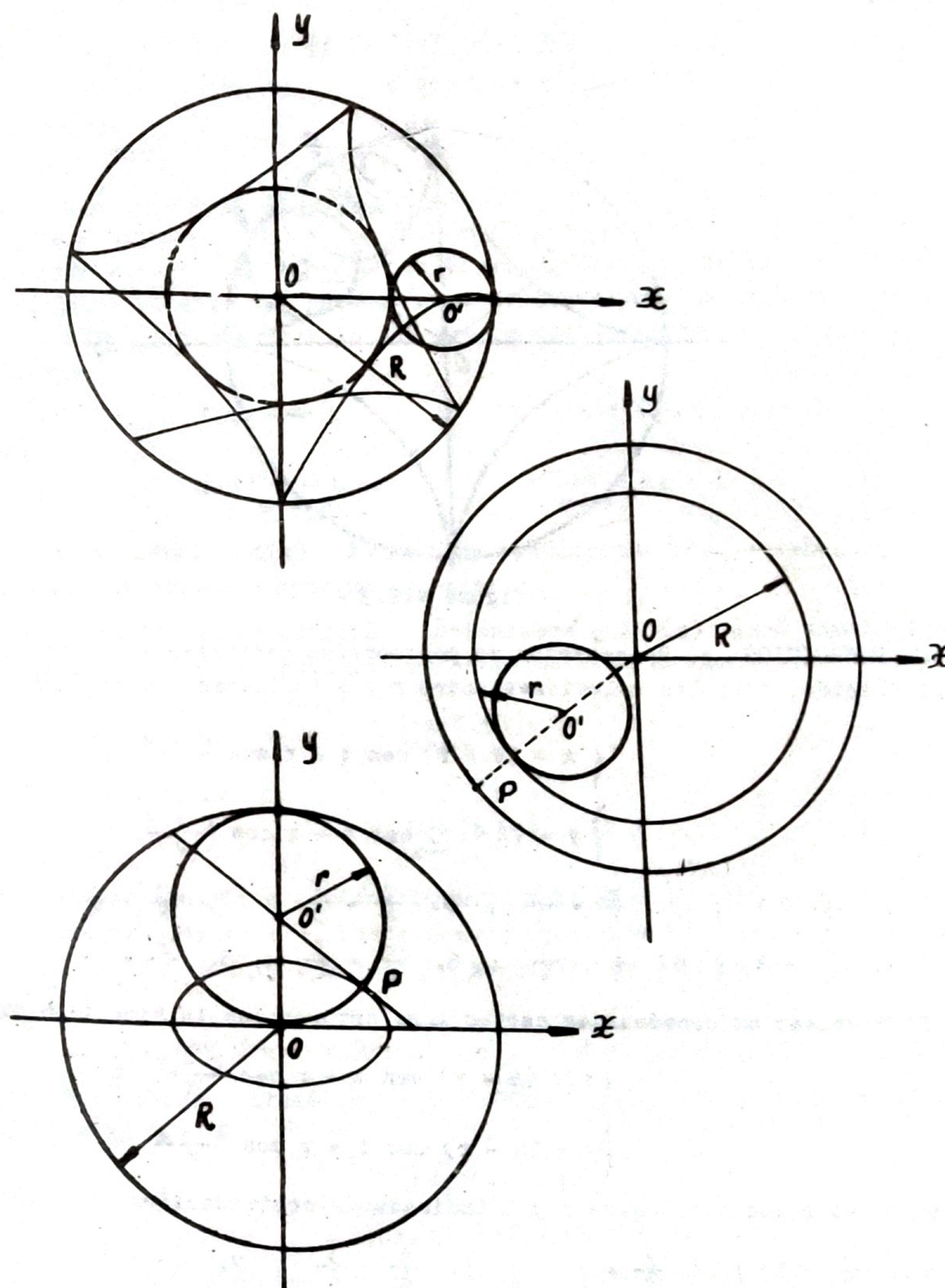
donde t es el ángulo de rodamiento.-

También como hemos demostrado para la epicicloide (ver parágrafo VII.3), si $\frac{r}{R}$ es racional, la hipocicloide es curva algebraica, en tanto que si $\frac{r}{R}$ es irracional, la hipocicloide es curva trascendente.-

Según pertenezca el punto generador a la ruleta, o le sea exterior o interior, resultan tres tipos de hipocicloides: común, larga y corta, respectivamente.-

En la figura VII.8-a, b, c, respectivamente se han representado gráficamente: común, larga y corta.-

También ahora la cantidad de ondas que se forman depende, en cada caso, de la relación existente entre los radios de la ruleta (r) y base (R). Cuando las relaciones entre ellos son sencillas las ecuaciones de la expresión (1) se simplifican notablemente. Tal es lo que sucede con el astroide,



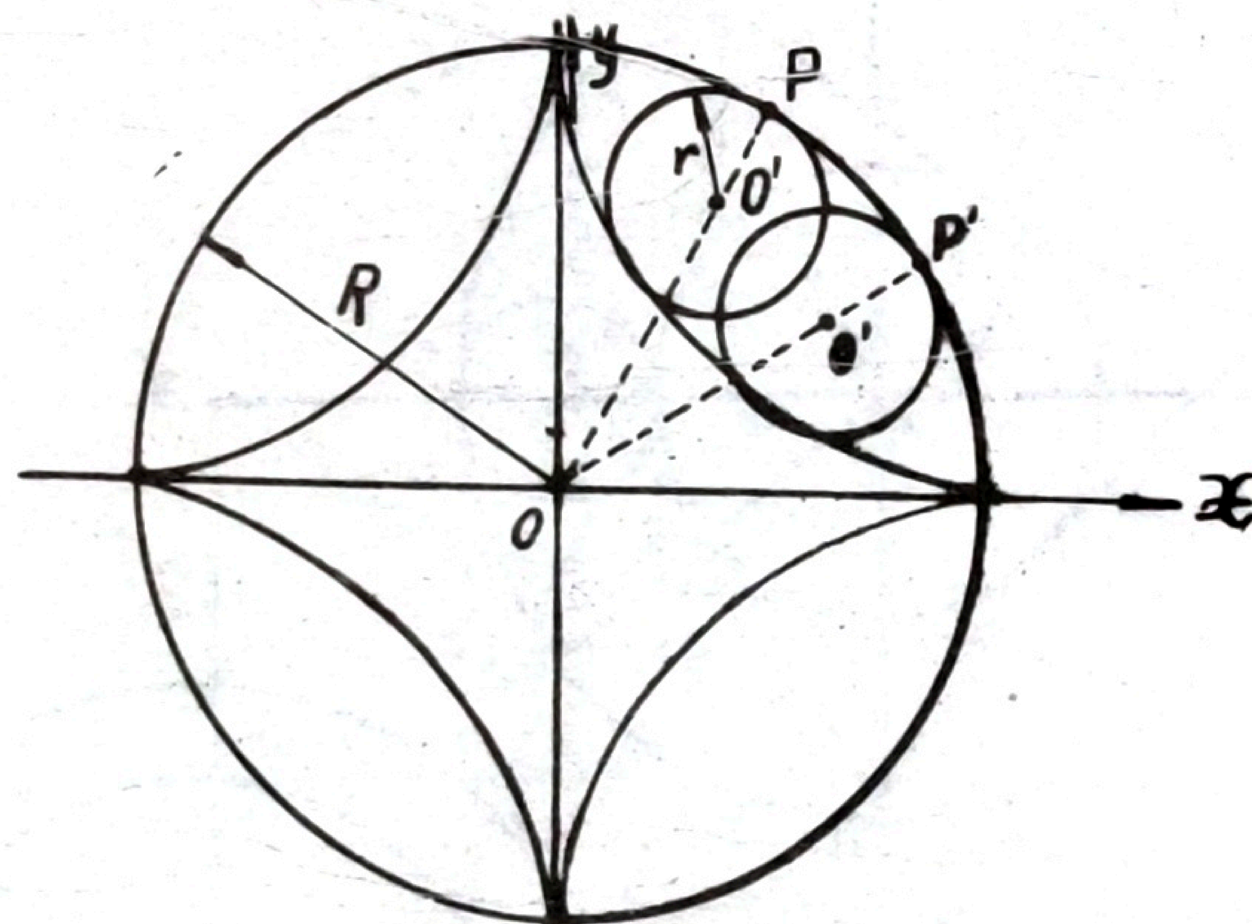
- figura VII.8 -

obtenida si $R = 4r$, cuya representación gráfica se aprecia en la figura VII.9.- Sus ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x = 3r \text{ sen } t - r \text{ sen } 3t \\ y = 3r \cos t - r \cos 3t \end{cases}$$

o sea:

$$\begin{cases} x = 4r \text{ sen}^3 t \\ y = 4r \cos^3 t \end{cases}$$



- figura VII.9 -

EJERCICIOS: a) Representar en coordenadas cartesianas ortogonales la epicicloide, para las relaciones entre r y R indicadas a continuación:

$$\begin{cases} x = (R + r) \text{ sen } t - r \text{ sen } \frac{r + R}{r} t \\ y = (R + r) \cos t - r \cos \frac{r + R}{r} t \end{cases}$$

1. $\frac{r}{R} = 1$; 3. $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$; 5. $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$; 7. $\frac{r}{R} = \frac{3}{4}$

2. $\frac{r}{R} = 2$; 4. $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$; 6. $\frac{r}{R} = \frac{3}{2}$; 8. $\frac{r}{R} = \frac{5}{2}$

b) Representar en coordenadas cartesianas ortogonales la hipocicloide:

$$\begin{cases} x = (R - r) \text{ sen } t - r \text{ sen } \frac{R - r}{r} t \\ y = (R - r) \cos t + r \cos \frac{R - r}{r} t \end{cases}$$

para las relaciones entre r y R indicadas a continuación:

3. $\frac{r}{R} = 3$; 3. $\frac{r}{R} = 5$; 5. $\frac{r}{R} = \frac{5}{2}$; 7. $\frac{r}{R} = \frac{5}{3}$

4. $\frac{r}{R} = 4$; 4. $\frac{r}{R} = 6$; 6. $\frac{r}{R} = \frac{7}{2}$; 8. $\frac{r}{R} = \frac{9}{4}$

c) De ser posible, expresar de modo más sencillo las ecuaciones de los ejercicios a) y b) con los valores que se den a r y R.-

CAPITULO VIII

EL LIMITE FUNCIONAL

VIII.1.- **Límite de una función.**- Se dice que una función $f(x)$ se aproxima infinitamente al valor 1 -o converge o tiende hacia 1-, o tiene límite 1, cuando x tiende al valor a, si el valor absoluto de la diferencia $f(x) - 1$, puede hacerse tan pequeño como se quiera en las proximidades del punto $x = a$ (sin interesarnos lo que ocurre precisamente en el punto $x = a$). En símbolos:

$$f(x) \longrightarrow 1 \quad \text{ó} \quad \lim f(x) = 1 \quad \text{para } x \longrightarrow a$$

o bien:

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a} f(x) = 1 \qquad (1)$$

cuando la diferencia $/f(x) - 1/$ se hace arbitrariamente pequeña, con tal de tomar x suficientemente próximo al valor a.-

Por practicidad de notación, indicaremos que $f(x)$ tiene límite 1, cuando x tiende al valor a, mediante la notación (1), es decir así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1$$

EJEMPLOS: a) Es:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 2) = 11 \qquad (2)$$

pues $x^2 + 2$ puede hacerse arbitrariamente próximo a 11 con tal de tomar x suficientemente próximo a 3. Puede conseguirse, por ejemplo, que la diferencia $/(x^2 + 2) - 11/ < 0{,}01$ con tal que x difiera de 3 en menos de dos milésimos:

$$2{,}998 < x < 3{,}002 \quad \text{ó} \quad /x - 3/ < 0{,}002$$

en efecto: cuando x crece desde $3 - 0{,}002 = 2{,}998$ hasta $3 + 0{,}002 = 3{,}002$; $x^2 + 2$ crece desde:

$$(2{,}998)^2 + 2 = 10{,}988004 < 10{,}99$$

hasta:

$$(3{,}002)^2 + 2 = 11{,}012004 > 11{,}01$$

Pero esto no basta para que valga (2). Es preciso que la aproximación indicada pueda mejorarse tanto como se quiera; en otras palabras: dado un número positivo arbitrario (por ejemplo $\varepsilon = 0{,}000001$), sea posible hallar un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que: $/(x^2 + 2) - 11/ < \varepsilon$ con tal que:

$$0 < /x - 3/ < \delta$$

Estas consideraciones conducen a formular con precisión el concepto de límite así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

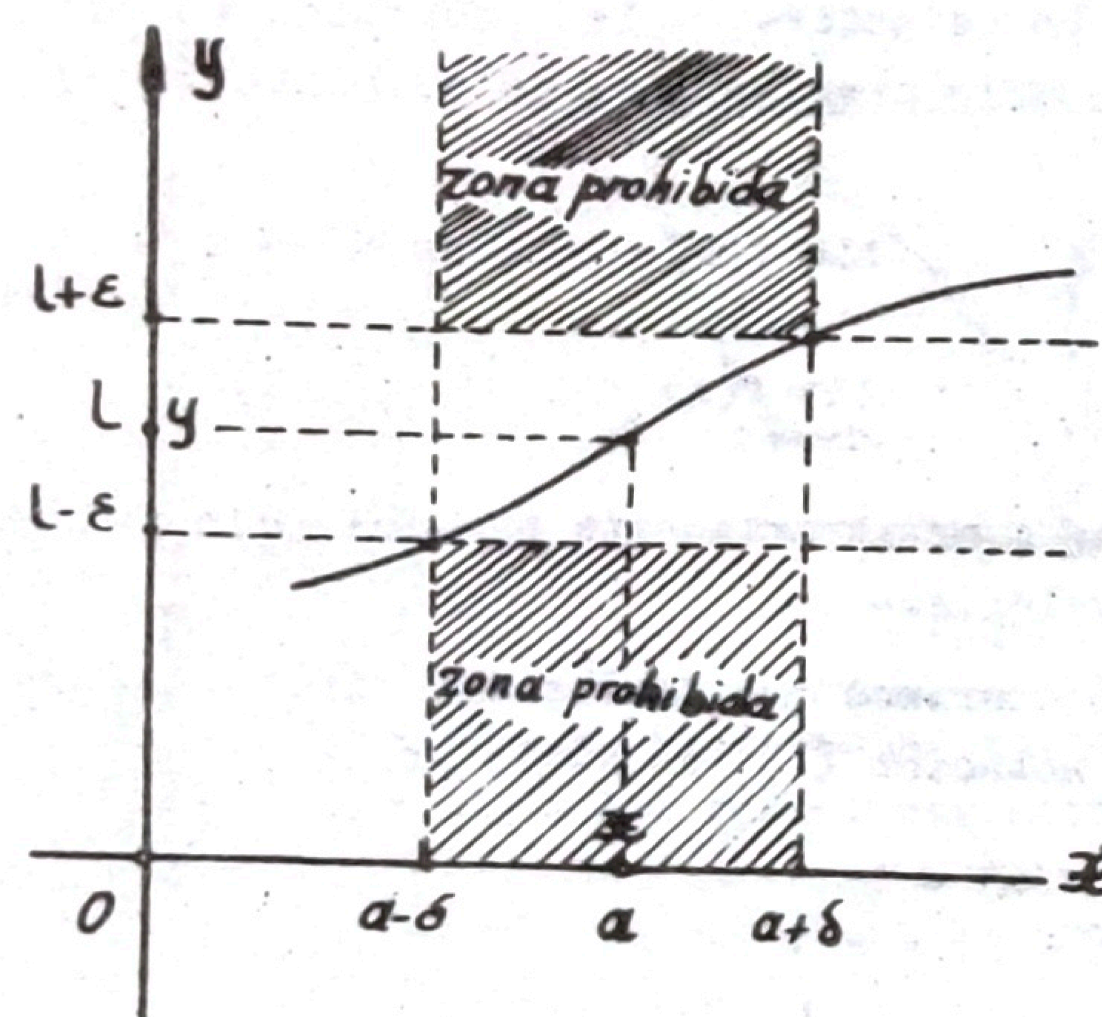
si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que:

$$/ f(x) - l / < \varepsilon \qquad (3)$$

para:

$$0 < / x - a / < \delta \qquad (4)$$

Llamando entorno reducido de un punto A a cualquier entorno de A excluído el mismo punto A, la definición anterior equivale a decir que es el $\lim f(x) = l$ para $x \to a$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno reducido (4) del punto A tal que $f(x)$ está definida en todo punto de él y se verifica la expresión (3).-



- figura VIII.1 -

Gráficamente (figura VIII.1) esto significa que dentro de la faja horizontal del plano coordenado, comprendida entre $y = l - \varepsilon$, e $y = l + \varepsilon$, están todos los puntos del trozo de gráfica que corresponde al entorno reducido (4).-

Se recuerda que con la indicación $x \to a$ se indica que x se aproxima indefinidamente al valor a, pero puede tomar valores menores o mayores que a, es decir, puede acercarse al valor a por la izquierda o por la derecha.-

Como en un entorno reducido es $x \neq a$, en la definición de límite no intervienen más que los valores de la función $y = f(x)$ en la proximidad de $x = a$, pero no el mismo valor a, en el cual la función puede no tener valor ninguno, o tener un valor cualquiera. En consecuencia: dos funciones que son iguales para todos los valores de x distintos del $x = a$, tienen el mismo límite para $x \to a$.- Por lo tanto: es legítimo, antes de calcular el límite, hacer en la función todas las simplificaciones convenientes, incluso la supresión de factores comunes que se anulan para $x = a$, siempre que éstos no se anulen para otros valores de x próximos al valor a.-

EJEMPLO: a) Sea la función $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$.- Su límite para $x \to 0$ es 2, puesto que para todo valor $x \neq 0$ es $y = x + 2$, y por lo tanto: $y - 2 = x$ llega a ser tan pequeño como se quiera; luego: $\lim \dfrac{x^2 + 2x}{x} = 2$. Sin embargo, para $x = 0$ la función no tiene valor correspondiente, pues carece de sentido aritmético dividir por cero.-

También puede suceder que el límite de una función no exista o que una función alcance infinitas veces su límites mientras x no alcanza el valor a.- Ello es lo que respectivamente sucede con $\lim \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ para $x \to 0$, y con

$\lim x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ también para $x \to 0$.-

La circunstancia de excluir en las desigualdades (3) y (4) que aparecen en la definición de límite lo que ocurre en el punto $x = a$, hacia el cual tiende la variable, es lo que hace fecundo este concepto de límite, pues merced a ello es posible evitar operaciones prohibidas.-

Conviene volver a destacar la arbitrariedad de ε. Cualquiera sea su valor, al definir un límite siempre debe poder lograrse que la diferencia $/ f(x) - l / < \varepsilon$.-

EJERCICIOS: a) Demostrar que:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \cos x = 0$$

$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

VIII.2.- **Propiedades de los límites.**- De la definición de límite de una función surgen las siguientes propiedades:

a) Para x suficientemente próximo al valor a, la función tiene el mismo signo que su límite. En efecto: si $l = \lim f(x) > 0$, como $f(x)$ difiere de l en menos de l para x suficientemente próximo al valor a, es $f(x) > 0$. - Análogamente, si l es negativo, resulta $f(x) < 0$.-

b) Si dos funciones tienen límites distintos para $x \to a$, la de mayor límite supera a la otra para todo x suficientemente próximo al valor a.- En efecto: sea $l = \lim f(x)$ y $m = \lim g(x)$. Si $l > m$ resultará $f(x) > g(x)$ para todo x suficientemente próximo al valor a.-

Como corolario de la propiedad que se analiza resulta que: si para todo valor de x es $f(x) < g(x)$, y ambas funciones tienen límite, entonces es

$$\lim f(x) \leq \lim g(x)$$

porque si fuese: $\lim f(x) > \lim g(x)$, llegaría a ser $f(x) > g(x)$, contra la hipótesis.-

c) Si una función está comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite para $x \to a$, tiene este mismo límite. En efecto: si $f(x)$ está comprendida entre dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, que tienen el mismo límite para $x \to a$, la diferencia entre $f(x)$ y l está comprendida entre las dife

rencias $g(x) - 1$ y $h(x) - 1$; luego, será menor que ε en valor absoluto si éstas lo son.-

VIII.3.- **Infinitésimos.-** Decir que $\lim_{x \to a} f(x) = 1$, equivale a decir que la diferencia $f(x) - 1 = \varphi(x)$ que es una nueva función de x, tiene límite cero para $x \to a$; o sea que $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$.-

Esto nos indica la importancia que tiene para el cálculo de límites la consideración de las funciones con límite cero, y la conveniencia de dar un nombre a tales funciones.-

Llamaremos infinitésimo o infinitamente pequeño para $x \to a$, a toda función $\varphi(x)$ que tienda a cero para $x \to a$, es decir toda función $\varphi(x)$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

Así, por ejemplo, sen x es infinitésimo para $x = 0$; cos x es infinitésimo para $x = \frac{\pi}{2}$, pero no lo es para $x = 0$.-

La condición esencial del infinitésimo es la variabilidad y tener por límite 0. Hablar de números no nulos infinitamente pequeños es un contrasentido, porque siendo un número invariable, si no es nulo no puede llegar a ser menor que cualquier otro número, que es la condición esencial del infinitésimo.-

Por otra parte las funciones no son infinitésimos en general, sino en ciertos puntos de su variable independiente. Así, sen x es infinitésimo para $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, pero no lo es para ningún otro valor de x.-

Es evidente del concepto de infinitésimo la siguiente propiedad: toda función con límite, es igual a éste más un infinitésimo, y recíprocamente: si a una constante se le suma un infinitésimo, la función obtenida tiene por límite dicha constante. En efecto: si $\lim_{x \to a} f(x) = 1$, resulta: $f(x) - 1 = \varphi(x)$ y, por lo tanto:

$$f(x) = 1 + \varphi(x)$$

VIII.4.- **Operaciones con infinitésimos.-** Sean los infinitésimos siguientes $\lim \varphi(x) = 0$ y $\lim \psi(x) = 0$, ambos para $x \to a$, resulta:

a) la suma de dos infinitésimos es un infinitésimo. En efecto: ello significa que se puede hacer $|\varphi(x)| < \varepsilon$ y $|\psi(x)| < \varepsilon$; entonces:

$$|\varphi(x) + \psi(x)| < |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

y puesto que ε es tan pequeño como se quiera, queda demostrado que también $\varphi(x) + \psi(x)$ puede hacerse, en valor absoluto, tan pequeño como se quiera, o lo que es lo mismo que la suma también es infinitésima.- En otros términos resulta que:

$$\lim \left[\varphi(x) + \psi(x)\right] = 0$$

b) El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo. En efecto:

$$|\varphi(x) \cdot \psi(x)| = |\varphi(x)| \cdot |\psi(x)| < \varepsilon . \varepsilon = \varepsilon^2$$

es decir el producto de los dos infinitésimos puede hacerse tan pequeño como se quiera, siendo también un infinitésimo. En otros términos resulta que:

$$\lim \left[\varphi(x) \cdot \psi(x)\right] = 0$$

c) El producto de un infinitésimo por una constante K es un infinitésimo.- En efecto:

$$|K \cdot \varphi(x)| = |K| \cdot |\varphi(x)| < |K| \cdot \varepsilon$$

y esta última expresión puede hacerse tan pequeña como se quiera siendo también un infinitésimo. En otros términos resulta que:

$$K \cdot \lim \varphi(x) = 0$$

d) A diferencia de lo que sucede con la suma (resta) y producto de infinitésimos, no podemos asegurar nada en general sobre el cociente de infinitésimos. En efecto: basta considerar algunos ejemplos:

1. El cociente $\frac{x^5}{x^2}$ de los infinitésimos x^5, x^2, es igual a x^3, que también es infinitésimo;
2. El cociente $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$, expresión que se hace tan grande como se quiera si $x \to 0$;
3. El cociente $\frac{x^2}{2x^2}$ de los infinitésimos x^2 y $2x^2$, es igual al número $\frac{1}{2}$ que no es un infinitésimo.-

En general: si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son dos infinitésimos y $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \to 0$, se dice que $\varphi(x)$ es un infinitésimo de orden superior respecto de $\psi(x)$. Se escribe: $\varphi = 0(\psi)$.-

Si $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \to K$ (constante), se dice que los infinitésimos son del mismo orden. Se escribe $\varphi \sim K\psi$

Si el cociente $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ puede hacerse tan grande como se quiera, se dice que $\varphi(x)$ es un infinitésimo de orden inferior respecto de $\psi(x)$. Se escribe $\psi = 0(\varphi)$

VIII.5.- **Cálculo de límites.-** En muchos casos, el problema de calcular un límite es muy simple. En efecto: dada la función $(x^2 + 2)$ es:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 2) = 11$$

pues basta observar que cuando x se aproxima a 3, x^2 se aproxima a 9, y entonces $(x^2 + 2)$ lo hace a 11. Este es simplemente el valor de la función para $x = 3$, y en la consideración que precede hemos usado simplemente una propiedad de la función, llamada continuidad. Menos trivial es el ejemplo de la función $\frac{x^2 + 2x}{x}$, donde el reemplazo directo es imposible, no obstante lo cual hemos procedido a calcular su límite directamente.-

Para el cálculo de límites en casos más complicados son útiles los siguientes teoremas, que demostraremos mediante las propiedades de los infinitésimos:

a) el límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites. En efecto: si

$$\lim f(x) = l \quad ; \quad \lim g(x) = l'$$

como $f(x) = l + \varphi(x)$ y $g(x) = l' + \psi(x)$, resulta:

$$f(x) + g(x) = (l + l') + \varphi(x) + \psi(x)$$

y entonces por la propiedad a) del párrafo VIII.4, se obtiene finalmente:

$$\lim \left[f(x) + g(x)\right] = l + l'$$

b) el límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites. En efecto: si

$$\lim f(x) = l \quad ; \quad \lim g(x) = l'$$

como:

$$f(x) = l + \varphi(x); \qquad g(x) = l' + \psi(x)$$

multiplicando resulta:

$$f(x) \cdot g(x) = \left[l + \varphi(x)\right] \cdot \left[l' + \psi(x)\right] =$$
$$= l\,l' + \left[l\,\psi(x) + l'\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x)\right]$$

de donde aplicando c) y a) del párrafo VIII.4, se obtiene finalmente:

$$\lim \left[f(x) \cdot g(x)\right] = l \cdot l'$$

c) Como $f(x) - g(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x)$, resulta de los teoremas anteriores que el límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites, y generalizando:

d) Una suma algebraica (un producto) de varias funciones con límites finitos tiene como límite la suma algebraica correspondiente (el producto) de los límites de esas funciones;

e) el límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{l}{l'}$$

Por esta razón no se puede aplicar este teorema al cálculo siguiente:

$$\lim_{x \to a} \frac{(x^2 - a^2)}{(x - a)}$$

pero esto no impide que el límite exista, pues observando que para $x \neq a$ es:

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = x + a$$

vemos que aquél límite existe y vale $2a$.-

La demostración del teorema se realiza en forma semejante al b) del presente parágrafo.-

Si una función $f(x)$ tiene una expresión analítica que carece de sentido preciso cuando $x = a$ y, en cambio, está bien definido su límite l, cuando $x \to a$, se considera a este límite l como el "verdadero valor" de la función $f(x)$ en a.- Tal es lo que sucede con la función recientemente considerada: $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$, cuyo límite $2a$ cuando $x \to a$ da el verdadero valor de la función en dicho punto.-

Ejemplos: a) la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}$$

toma para $x = 5$ la forma $\frac{0}{0}$, expresión que en aritmética carece de significado. En cambio es:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x - 5)(x^2 + 2x - 3)} =$$
$$= \lim_{x \to 5} \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16}$$

EJERCICIOS: a) Verificar el verdadero valor de las siguientes funciones en los puntos que respectivamente se indican:

1. $\dfrac{3x^3 + 6x^2}{2x^4 - 15x^2}$ para $x = 0$

2. $\dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ para $h = 0$

3. $\dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ para $x = 0$

4. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ para $x = 2$

b) Verificar los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad ; \quad \lim_{a \to 2} \frac{a^4 - 16}{a^2 - 4} = 8$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + 2x}{x} = 2 \quad ; \quad \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 3t + 2} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^2 - 3x - 1}{x^2 - 1} = \frac{5}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49} = -\frac{1}{56}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x^3 + x}{x^2 - 2x} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to a} \frac{x^2 - \sqrt{a^3 x}}{\sqrt{ax} - a} = 3a$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \quad ; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 1}}{\sqrt{x - 1}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 4x^2}{x^5 - 2x^2} = -2 \quad ; \quad \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h} = 12$$

VIII.6.- **Límites infinitos.-** Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Por figurar la variable independiente en el denominador de la expresión de la función, la misma es una función algebraica racional fraccionaria (ver parágrafo I.5).- Su estudio lo realizamos en el capítulo siguiente.-

Pero, veamos lo que ocurre con la función dada en el punto $x = 0$ y su vecindad.-

Para $x = 0$, la función no está definida. Cuando x se aproxima a cero, f(x) crece tanto como se quiera, es decir, dado un número M arbitrariamente grande, existe un número $\delta = \delta(M)$ 0 tal que:

$$/f(x)/ > M \quad \text{para} \quad 0 < /x-0/ < \delta$$

En este caso no existe lim f(x) para $x \to 0$, pues f(x) no se aproxima a ningún valor cuando $x \to 0$. Sin embargo, convendremos en indicar este comportamiento de la función diciendo que para $x \to 0$, f(x) crece infinitamente o tiende a infinito o tiene límite infinito, lo que se indica:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Del concepto se deduce que infinito no es un número, sino que la función puede tomar valores tan grandes como se quiera.-

Aquí tampoco interesa el valor de la función en el punto a, donde generalmente no está definida, sino los valores de un entorno del punto a.-

Análogamente, diremos que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

cuando:

$$-f(x) \to +\infty$$

Finalmente: una función también puede tener a infinito sin signo determinado. Por ejemplo: la función $f(x) = \frac{1}{x}$, también algebraica racional fraccionaria, para $x \to 0$.-

En general se dice que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

cuando para cada número M arbitrariamente grande, exista un número $\delta = \delta(M) > 0$, tal que:

$$/f(x)/ > M \quad \text{para} \quad 0 < /x-a/ < \delta$$

EJERCICIOS: a) Verificar los siguientes límites:

$\lim_{x \to 0} -\frac{3}{x} = -\infty$; $\lim_{t \to 3} \frac{2}{t-3} = +\infty$

$\lim_{x \to 2} \frac{5}{(x-2)^2} = +\infty$; $\lim_{x \to 0} \frac{3x^8 - 2x^4}{4x^7 - x^5} = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty$; $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1} = +\infty$

VIII.7.- **Variable infinita.-** Hasta ahora hemos considerado límites para $x \to a$, donde a es un valor finito, pero, en ocasiones interesa conocer el comportamiento de una función, no cuando x se aproxima a un valor a, sino cuando x crece indefinidamente. Si en tal caso f(x) se acerca tanto como se quiera a un número l, pondremos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

lo que significa que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un número $H = H(\varepsilon)$ tal que:

$$/f(x) - l/ < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x > H$$

Así, por ejemplo, dada la función $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ resulta $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-5}{x-3} = 2$, pues, en efecto: cuando $x \to +\infty$, también tienden a $+\infty$ el numerador y el denominador, y sobre el cociente no se podría decir nada. Pero, si previamente dividimos ambos términos por x, resulta:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$$

con lo que $\frac{5}{x} \to 0$, $\frac{3}{x} \to 0$, resultando:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-5}{x-3} = \frac{2}{1} = 2$$

Análogamente definiremos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

lo que significa que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un número $H = H(\varepsilon)$ tal que:

$$/f(x) - l/ < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x < H$$

Así, por ejemplo, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.-

Finalmente, el valor límite corresponde a veces a valores de x crecientes a infinito en valor absoluto, aun sin un signo determinado. En tal caso pondremos:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

lo que significa que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un número $H = H(\varepsilon)$ tal que:

$$/f(x) - l/ < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad /x/ > H$$

Así, por ejemplo, $\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0$.-

EJERCICIOS: a) Verificar los siguientes límites:

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^5 + 8x^3 - 1} = 0$; $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 4x - 8} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2x} = 3$; $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{4x^3 + x} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^4 - b}{ax^4 + b}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right) = \frac{1}{2}(a+b)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 10^x = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} (3/5)^x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

VIII.8.- __Límites infinitos con variables infinitas.__- Combinando los casos de los parágrafos VIII.6 y VIII.7, decimos, en general:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Ello significa que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un número $H = H(\varepsilon)$ tal que:

$$/ f(x) / > \varepsilon \quad \text{para todo} \quad / x / > H$$

Así, por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+1} = \pm\infty$$

son tan solo algunas combinaciones de los casos expuestos en los parágrafos VIII.6 y VIII.7.-

EJERCICIOS: a) Verificar los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x-1}{4x^2+10} = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^2(4x+7)^2}{(3x-4)^2(5x^2+1)} = \infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+3^x}{3+2^x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{x}{100}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

VIII.9.- __Indeterminación: generalidades.__- Dada una función $f(x)$ cualquiera al calcular su límite cuando $x\to a$ pueden presentarse diversas posibilidades que resumimos a continuación:

a) si $f(x)$ está definida para $x = a$, toma allí un valor $f(a)$ sin que se produzcan cambios bruscos o interrupciones de ningún tipo en las proximida-

des de ese punto. Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

b) si $f(x)$ no está definida para $x = a$, ni en puntos próximos, en ese intervalo la función dada no existe y, por lo tanto, tampoco existe su límite;

c) si $f(x)$ está definida para $x = a$, pero este valor corresponde a un punto aislado, es decir alejado de los valores de la función en puntos próximos, surge una indeterminación porque su límite, si existe, es posible calcularlo salvando las operaciones aritméticas prohibidas que pudieran originarse;

d) si $f(x)$ no está definida para $x = a$, pero sí en las proximidades del valor a, es posible entonces analizar el comportamiento de la función y por lo tanto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

e) si $f(x)$ no está definida para $x = a$ ni es posible analizar su comportamiento en las proximidades de ese valor, surge una indeterminación porque su límite, si es que existe, es posible calcularlo salvando las operaciones aritméticas prohibidas que pudieran originarse.-

Las indeterminaciones más comunes son las siguientes:

a) cociente de dos variables que tienden a cero. Ello conduce a una indeterminación $\frac{0}{0}$;

b) cociente de dos variables que crecen (o decrecen) infinitamente. Ello conduce a una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$;

c) diferencia de dos variables que crecen (o decrecen) infinitamente. Ello conduce a una indeterminación $\infty - \infty$.-

Estos casos de indeterminaciones no son únicos, pero sí son los que más frecuentemente se presentan en cuestiones prácticas o teóricas. Otros casos de indeterminaciones es posible analizarlos y resolverlos con los recursos del CALCULO DIFERENCIAL, al igual que problemas complicados que se presentan cuando surgen combinaciones entre los tres casos enunciados.-

Las reglas que consignamos en los parágrafos siguientes para resolver los distintos tipos de indeterminaciones no son absolutas sino tan solo específicas, porque los problemas que dan origen a las indeterminaciones son prácticamente infinitos.-

VIII.10.- __Indeterminación $\frac{0}{0}$__.- a) Dada la función $f(x)$ formada por el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$, resultará $P(a) = Q(a) = 0$. Como todo polinomio es divisible por la diferencia entre la variable y cada una de sus raíces, al ser a raíz del numerador y denominador de la función dada, será posible escribir:

$$\lim_{x\to a} (x) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a) \,.\, P_1(x)}{(x-a) \,.\, P\ (x)} = \lim_{x\to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Si $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ simultáneamente no se anulan para $x = a$ el problema ha sido resuelto; en caso contrario se reitera el procedimiento.-

En la práctica el paso intermedio no se indica; entonces se dividen ambos polinomios por $(x - a)$ y se colocan solamente los cocientes $P_1(x)$ y $Q_1(x)$.

Ejemplos: a) Calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^5-8x^4+x^2+2x+24}{x^4+3x^3-14x^2-x+18}$$

Como ambos polinomios se anulan para $x = 2$, dividiéndolos por $x - 2$, operación que efectuamos empleando la REGLA DE RUFFINI, resulta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^5-8x^4+x^2+2x+24}{x^4+3x^3-14x^2-x+18} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^4-2x^3-4x^2-7x-12}{x^3+5x^2-4x-9} = -\frac{10}{11}$$

b) Calcular:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4+6x^3+10x^2+6x+9}{x^4+8x^3+18x^2-27}$$

Como ambos polinomios se anulan para $x = -3$, dividiéndolos por $x + 3$ resulta:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^4+6x^3+10x^2+6x+9}{x^4+8x^3+18x^2-27} = \lim_{x\to -3}\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^3+5x^2+3x-9} =$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{x^2+1}{x^2+2x-3} = \infty$$

porque el numerador no se anula pero sí el denominador

c) Sabiendo que dos infinitésimos son equivalentes cuando su cociente es igual a la unidad, y dados $P(x) = 4x^2 - 9x - 9$, $Q(x) = 7x^2 - 27x + 18$, probar que dichos polinomios son infinitésimos equivalentes en un entorno del punto $x = 3$.-

Ante todo, debemos probar que $P(x)$ y $Q(x)$ son infinitésimos; para ello basta calcular sus límites para $x \to 3$. Se obtiene:

$$\lim_{x\to 3} P(x) = \lim_{x\to 3}(4x^2-9x-9) = 0$$

$$\lim_{x\to 3} Q(x) = \lim_{x\to 3}(7x^2-27x-18) = 0$$

Efectuando el cociente entre $P(x)$ y $Q(x)$ y dividiendo ambos polinomios por $x - 3$ resulta:

$$\lim_{x\to 3}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{4x^2-9x-9}{7x^2-27x+18} = \lim_{x\to 3}\frac{4x+3}{7x-6} = \frac{15}{15} = 1$$

Por lo tanto ambos son infinitésimos equivalentes.-

b) Cuando las expresiones algebraicas $P(x)$ y $Q(x)$ son irracionales en la función $f(x)$ y resulta una indeterminación $\frac{0}{0}$ el despeje del factor $x - a$ que anula ambos términos suele ser más complicado.-

Generalmente el recurso que se emplea para llegar a tal fin consiste en multiplicar y dividir la expresión dada por algún factor elegido conve-

nientemente para eliminar los radicales que figuren en ella, con tal de que el mismo no introduzca una nueva indeterminación.-

Para ello y a través de algunos ejemplos, concretamos algunas sugestiones útiles:

1. Si existe una diferencia en la cual figuren raíces cuadradas, al multiplicar por la expresión conjugada se eliminan dichas raíces, lográndose así simplificar la función dada. Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$$

Multipliquemos por su conjugada:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{16}$$

2. Si existe una diferencia de raíces (cúbicas, cuárticas,... n-simas) iguales, la indeterminación se salva mediante el siguiente razonamiento: sea n el índice de ambas raíces de radicandos p y q. El factor k necesario para salvar la indeterminación vale:

$$k = \frac{p-q}{\sqrt[n]{p}-\sqrt[n]{q}}$$

pero, como por definición de raíz n-sima es $p = z^n$ y $q = a^n$, resulta reemplazando:

$$k = \frac{z^n-a^n}{z-a} = z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\dots+za^{n-2}+a^{n-1}$$

luego: por definición de raíz n-sima, resulta:

$$k = \sqrt[n]{p^{n-1}}+\sqrt[n]{p^{n-2}q}+\sqrt[n]{p^{n-3}q^2}+\dots+\sqrt[n]{p\cdot q^{n-2}}+\sqrt[n]{q^{n-1}}$$

Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[3]{3x+2}}{x-2}$$

resulta:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[3]{3x+2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+\sqrt[3]{(x^2+4)(3x+2)}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+\sqrt[3]{(x^2+4)(3x+2)}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+4-3x+2}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+\sqrt[3]{(x^2+4)(3x+2)}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right)} = \frac{1}{12}$$

3. Si se tienen raíces de distintos índices pero todas aquéllas en que figura la variable tienen el mismo radicando (o múltiplo uno de otro) que es función lineal de la variable independiente, se sustituye dicho radicando común por una nueva variable elevada al mínimo común múltiplo de los índices de las raíces, cambiándose entonces el valor límite de la variable independiente por el que corresponda a la nueva variable.-

Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[9]{3x-5}+\sqrt[6]{3x-5}-2}{\sqrt[9]{3x-5}-\sqrt[6]{3x-5}}$$

reemplazando $3x-5=t^{18}$ resulta:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t^3-2}{t^2-t^3}=\lim_{t\to 1}\frac{(t^2+2t+2)(t-1)}{-t^2(t-1)}=-5$$

4. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones trascendentes no pueden darse reglas generales. Tratándose de funciones trigonométricas se demuestra que: cuando un ángulo es infinitésimo, el ángulo, su seno y su tangente son equivalentes. Esta afirmación permite, siempre que se den senos o tangentes que tiendan a cero, reemplazarlos por el ángulo respectivo.

Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}-3\,\text{sen}\,3x}{4x}$$

reemplazando sen $\frac{x}{2}$ y sen $3x$ por $\frac{x}{2}$ y $3x$ respectivamente, resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,\frac{x}{2}-3\,(3x)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-9)}{4x}=-2$$

EJERCICIOS: a) Calcular los siguientes límites aparentemente indeterminados:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-6x}{3x^2-4x-4}\quad;\quad\lim_{x\to -4}\frac{9x^4+60x^3-52x^2+16x+32}{x^3+4x^2-5x-20}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^3-10x^2-7x+3}{2x^3-9x^2+10x-3}\quad;\quad\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+3x^2-2x}{2x^4+9x^3+6x^2-20x-24}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{5x^2+3x-2}{4x^3-x+3}\quad;\quad\lim_{x\to 5}\frac{2x^3-10x^2-3x+15}{3x^3-11x^2-21x+5}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2-4x+4}\quad;\quad\lim_{x\to -3}\frac{3x^2+10x+3}{4x^4+20x^3+17x^2-6x+45}$$

b) Idem a) para:

$$\lim_{x\to -5}\frac{2x^3+17x^2+20x-75}{3x^3+31x^2+85x+1}\quad;\quad\lim_{x\to 1}\frac{2x^5-13x^3+19x^2+1}{x^5-2x^4+3x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{5x^3-21x^2+24x-4}{3x^3-10x^2+4x+8}\quad;\quad\lim_{x\to -2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^4+8x^3+24x^2+32x+96}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+7x^2-12x-45}{5x^3+32x^2+57x+18}\quad;\quad\lim_{x\to 4}\frac{x^5-15x^4+80x^3-16x^2+256}{9x^4+78x^3+193x^2-104x+16}$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{4x^3+29x^2+40x-48}{2x^3+17x^2+40x+16}\quad;\quad\lim_{x\to -6}\frac{4x^4+37x^3-540x-432}{x^4+12x^3-432x-1296}$$

c) Idem b) para:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5}{x^4-a^4}\quad;\quad\lim_{x\to a}\frac{(a+b)x^3-(a+b)x^2-a^2bx+a^2b^2}{(a-b)x^3-(a^2-b^2)x^2+a^2bx-a^2b^2}$$

$$\lim_{x\to -a}\frac{a^4-x^4}{a^5+x^5}\quad;\quad\lim_{x\to -a}\frac{a^4-x^4+a^3b+bx^3+a^2b^2-b^2x^2}{a^3+x^3+a^2b-bx^2+ab^2+b^2x}$$

d) Idem c) para:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x-2}}\quad;\quad\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d}\quad\sqrt{dx+c}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3x-1}}\quad;\quad\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{x+7}}{x\sqrt{x+2}}\quad;\quad\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{2x+6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{9+2x}}\quad;\quad\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$$

VIII.11.- **Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$**.- Dada la función $f(x)$ formada por el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, si $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, resulta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.-

Resolveremos esta indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ para funciones algebraicas, racionales e irracionales. En general: tratándose de funciones trigonométricas, cuando se presente una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ el problema puede reducirse a la indeterminación $\frac{0}{0}$ mediante convenientes reemplazos.-

a) Cuando la función algebraica $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es racional, es lícito despreciar en ambos polinomios todos los términos menos el de mayor grado. En efecto: sean

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\dots+a_{m-1}x+a_m$$

$$Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_{n-1}x+b_n$$

polinomios de $f(x)$ ordenados decrecientemente en el término variable x y de grados m y n respectivamente. Efectuado el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ por la variable de mayor potencia, pueden presentarse tres posibilidades:

1. si $m>n$, siendo $m-n=p$, el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se transforma así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x^{-1}+a_2x^{-2}+\dots+a_mx^{-m}}{b_0x^{-p}+b_1x^{-p-1}+\dots\dots+b_nx^{-m}}$$

y al pasar al límite, han de anularse todos los términos menos a_0, siendo entonces el numerador distinto de cero y el denominador nulo. Por ello:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty$$

2. si m n, siendo n-m = q, se divide por x^n con lo que el cociente se transforma así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_o x^{-q} + a_1 x^{-q-1} + \dots + a_m x^{-n}}{b_o + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \dots + b_m x^{-n}}$$

y al pasar al límite, han de anularse todos los términos menos b_o, obteniéndose entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

3. si m = n, el cociente se transforma así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_o + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots + a_m x^{-m}}{b_o + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \dots + b_n x^{-n}}$$

y al pasar al límite, han de anularse todos los términos menos $\frac{a_o}{b_o}$, obteniéndose entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_o}{b_o}$$

La simplicidad de las reglas enunciadas permite resolver problemas sin realizar cálculo alguno.-

b) Cuando la función algebraica $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es irracional son aplicables las reglas enunciadas precedentemente. No obstante, debe tenerse presente que para calcular el grado de una variable hay que considerar todos los exponentes e índices que la afectan. Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt[3]{2x^3 - 1}}{\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt[3]{3x^3 + 1}}$$

El grado de x, igual en todos los términos es 1. Dividiendo por x resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{3 + \frac{1}{x^3}}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}$$

EJERCICIOS: a) Calcular el límite de las siguientes funciones, cuando $x \to \infty$:

$y = \frac{3x^5 - 4x^3 + x^2 + 2}{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}$; $y = \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x - 3x^3 + 1}$

$y = \frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 - x^3 + x}$; $y = \frac{6x^2 - 9x^5 + 2x - 3}{5 - 4x + 6x^2}$

$y = \frac{4x^3 + 6x^2 - 2x + 10}{3x^2 - 6x + 8}$; $y = \frac{3x^2 - 8x^4 + x^6}{2x^4 - 3x + 1}$

$y = \frac{3x^7 + 8x^3 - 2}{2x^2 - 3x + 1}$; $y = \frac{5x^2 - 8x + x^7}{3x^2 - 2x + x^3}$

b) Idem a):

$y = \frac{3x^4 - 5x^3 + 1}{x^2 - 2x^4 + 6x^6}$; $y = \frac{(x^2-9)(3x^2+8)}{(4x^5-9)(3-2x)}$

$y = \frac{2 - 8x^3 - 6x + 4}{3x^5 - 2x^3 + 9}$; $y = \frac{(2x+1)(3x^2-2)}{(5x^3-2)(4x^2+3)}$

$y = \frac{1 - 2x + x^2 + 6x^3}{5x^3 - 2x^2 + 8x^5}$; $y = \frac{(x^2+1)(3x^2+2)(3x^2+3)}{(2x^3-1)(2x^3-2)(2x^2-3)}$

$y = \frac{3x^3 - 9x^2 + 3x - 1}{1 + x^2 + x + x^3 + 3x^4}$; $y = \frac{(x-1)(x^2-2)(x^3-3)}{(1-x^2)(1-2x^3)(1-3x^4)}$

c) Idem b):

$y = \frac{3x^2 - 6x^3 + 8x - 2}{7x^3 - 2x + 3 + 4x^2}$; $y = \frac{(x^2-1)(4x^3+1)}{(3x^4-1)(2x^3-7)}$

$y = \frac{2x^4 - 3x^2 + 9}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4}$; $y = \frac{(3x^3-1)^2(2x^2-3)}{(x^2-8)^2(16x^4+81)}$

$y = \frac{2x^5 - 3x^2 + 6x - 2}{3x^2 - x^5}$; $y = \frac{(2x-3)(3x-4)(4x-5)}{(2x+3)(3x+4)(4x+5)}$

$y = \frac{6 - 2x^2 + 3x}{5x^2 - 9x + 8}$; $y = \frac{(4-x^2)(8x^3+5)}{(3x^2-7)(5x+1)^2}$

d) Idem c):

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^2+1} - \sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{2x^3+1}}$; $\lim_{x \to} \frac{x\sqrt{x-2} + \sqrt{x\sqrt{x+2}}}{x\sqrt{x-2} - \sqrt{x\sqrt{x+2}}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^5-2} - \sqrt[4]{2x^9+5}}{\sqrt{6x^{10} - x^5 + 9}}$; $\lim_{x \to +} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x} - \sqrt[4]{3x^7-2}}{\sqrt{\sqrt[3]{x+2}} + \sqrt[2]{x^7+1} - \sqrt[3]{2x+3}}$

VIII.12.- **Indeterminación $\infty - \infty$**.- Sea la función f(x). Analizaremos los distintos tipos de funciones algebraicas que conducen a una indeterminación del tipo $\infty - \infty$ cuando se calcula su límite.-

Las funciones racionales enteras no conducen a la indeterminación que se estudia, porque dada una diferencia de dos términos variables, cuando la variable tiende a infinito, en el cálculo de su límite prevalece siempre el término de mayor grado.-

Las funciones racionales fraccionarias, cualquiera sea su forma, pueden reducirse hasta que se logre obtener un cociente de dos polinomios; si la variable tiende a infinito, en el cálculo de su límite se obtiene la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, no produciéndose para ningún valor finito la indeterminación que se analiza en el presente parágrafo.-

Las funciones irracionales enteras conducen, cuando se procede a cal-

cular su límite, a la indeterminación $\infty - \infty$ si la variable tiende a . El - problema entonces se resuelve llevándolo a la forma $\frac{\infty}{\infty}$, mediante conveniente utilidad de los recursos que proporciona el cálculo algebraico.-

Las funciones irracionales fraccionarias conducen a la indeterminación $\infty - \infty$ cuando se realiza el cálculo de su límite, siempre que la variable - tienda a valores que anulen los denominadores o a infinito. Si la expresión dada se reduce a común denominador puede quedar ya resuelta la indeterminación o, a lo sumo, presentarse indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

La indeterminación $\infty - \infty$ existe en la diferencia de los radicandos principales y no en los del segundo término de la expresión, por prevalecer allí el término de mayor grado. Multiplicando y dividiendo por la conjugada de la - función dada obtenemos:

$$\lim_{x \to} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{x} - x + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = 1$$

que conduce a una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que resuelta, dividiendo por $x^{\frac{1}{2}}$, permite obtener el resultado.-

Cuando la indeterminación $\infty - \infty$ se presenta en funciones trascendentes debe tratarse de expresar cada uno de los términos de la diferencia en forma de cociente y extraerse, luego, común denominador. Este procedimiento es particularmente útil con funciones trigonométricas que, como sabemos, pueden expresarse siempre como recíprocas de otra o como cociente de otras.

En caso contrario, si u y v tienden a infinito, puede aplicarse el siguiente proceso:

$$u - v = \frac{1}{\frac{1}{u}} - \frac{1}{\frac{1}{v}} = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$$

Sea, por ejemplo, calcular:

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x)$$

De acuerdo al procedimiento indicado resulta:

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}$$

resultado al cual se arriba luego de aplicar la equivalencia entre funciones trigonométricas infinitésimas.-

EJERCICIOS: a) Calcular los siguientes límites aparentemente indeterminados:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x+1}{(x-1)^2} - \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4-1}} \right] \quad ; \quad \lim_{x \to -2} \left[\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}} - \sqrt{\frac{1}{x^2-4}} \right]$$

$$\lim_{x \to -1} \left[\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} - \sqrt{\frac{x}{1-x^2}} \right] \quad ; \quad \lim_{x \to 3} \left[\frac{x}{(x-2)^2} - \sqrt{\frac{1}{x^4-81}} \right]$$

$$\lim_{x \to 2} \left[\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2-4}} - \frac{x+2}{(x-2)^2} \right] \quad ; \quad \lim_{x \to -3} \left[\sqrt{\frac{1}{x^3+27}} - \sqrt{\frac{1}{(x-3)^3}} \right]$$

Idem b):

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x+a} - \sqrt{x-2} \right] \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt[3]{x^2-1} \right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{1-2x} - \sqrt{2-x} \right] \quad ; \quad \lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x^2+1} \right]$$

c) Calcular los siguientes límites aparentemente indeterminados teniendo en cuenta que un ángulo, su seno y su tangente son equivalentes cuando son infinitésimos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{bx} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{tg} bx}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\operatorname{sen} bx} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{sen} bx}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\operatorname{tg} bx} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$$

d) Idem c):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg}^3 2x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sne}^2 2x \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 3x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{tg}^2 5x}{\operatorname{sen}^3 4x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x \cdot \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 3x \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{2x}{3}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{x^2 \cdot \operatorname{tg} 3x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{x \cdot \operatorname{sen}^2 6x}$$

e) Idem d):

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to -a} \frac{\operatorname{sen}(x+a)}{x^3+a^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^4} \quad ; \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } 3x}{1 - \cos x}$; $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x - 1) \sec \pi x$

f) Idem e):

$\lim\limits_{x \to \pi} (\text{ctg } 2x \, . \, \text{cosec } 3x)$; $\lim\limits_{x \to} (x - \pi)(\text{ctg } 2x + \text{cosec } 3x)$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\text{sen } 3x + \frac{1}{2} \text{ tg } 7x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)(\sec 3x - \frac{1}{2} \text{ tg } 7x)$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (2\text{tg } 6x + 3 \sec 2x)$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (3 \text{ tg } 2x + 5\text{ctg } 4x)$

CAPITULO IX

FUNCIONES RACIONALES FRACCIONARIAS

IX.1.- **Naturaleza del problema a estudiar.**- En el parágrafo I.5 (clasificación de funciones) se definieron las funciones algebraicas racionales - fraccionarias como aquellas donde la variable independiente, sometida a operaciones racionales (suma, resta, multiplicación, división y elevación a potencias de exponente entero) figuraba en el denominador de la expresión de la función. La relación:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

donde P(x) y Q(x) son polinomios ordenados decrecientemente en la variable x independiente, nos sintetizaba la expresión general de una función algebraica racional fraccionaria (o simplemente racional fraccionaria), a la par que servía para determinar el grado de la misma, pues, según fuere $m \gtrless n$ resultaba aquélla de m-simo o n-simo grado, respectivamente.- Así, por ejemplo:

$$y = f(x) = \frac{x}{4x^2 - 3x + 9(x - 1)}$$

es una función racional fraccionaria, de segundo grado.-

Objeto del presente capítulo es el estudio de las funciones algebraicas racionales fraccionarias y, en particular, se analizarán las funciones hiperbólica y homográfica.-

IX.2.- **Raíces.**- Para representar gráficamente una función racional fraccionaria cualesquiera, determinado el intervalo de definición de la misma, debe procederse seguidamente a calcular sus raíces.-

En general: dada una función algebraica racional fraccionaria cualesquiera $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, raíz de la misma, es todo valor real de su variable x independiente que anule a P(x), pues entonces es:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{Q(x)} = 0$$

Gráficamente ello significa que, en el punto correspondiente, la curva representativa de la función corta al eje de abscisas.-

Ahora bien: puede suceder que un valor a, raíz de P(x), también anule a Q(x); entonces:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{0}{0}$$

se produce una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y, calculado el $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 1$, se conviene en asignarle a la función el valor 1 en el punto $x = a$, valor que sólo en caso de ser nulo, es raíz de la función dada. Si $1 \neq 0$, en el punto $x = a$ por producirse la indeterminación $\frac{0}{0}$ no existe raíz para la función. Finalmente, si $1 = \infty$, la representación gráfica de f(x) tiene en ese punto una asíntota vertical (ver parágrafo IX.3).-

Sean x_1, x_2, ..., x_i raíces (reales o complejas) del polinomio P(x) de una función racional fraccionaria. Fácilmente es posible factorearlo escribiendo:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_i)$$

donde a_0 es coeficiente del término de mayor grado. Figurando un mismo factor $x - x_i$ k veces, se dice que x_i es raíz múltiple de orden k en dicho polinomio, y así entonces: si $k = 1$, x_i será raíz simple; si $k = 2$, x_i lo será doble; si $k = 3$, x_i lo será triple, etc.-

Se demuestra que: cuando x_i es raíz múltiple de orden impar la función cambia de signo en ese punto; en cambio si x_i es raíz múltiple de orden par, f(x) conserva el mismo signo. Esta conclusión solo se refiere a las raíces reales y es de gran importancia para el trazado de las curvas que gráficamente representan la función algebraica racional fraccionaria que se considere.-

Cuando $k \geq 2$, vale decir que si x_i es por lo menos raíz doble, la representación gráfica de la función es tangente al eje de abscisas en ese punto.-

EJEMPLO: a) Dada la siguiente función algebraica racional fraccionaria calcular sus raíces y determinar su orden de multiplicidad:

$$y = f(x) = \frac{(x^4 - 1)(x^2 - x - 6)^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$$

Las posibles raíces de la función dada son las del numerador; por lo tanto corresponde resolver sus ecuaciones, resultando:

1. $x^4 - 1 = 0 \quad ; \quad x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

de donde:

$$x_1 = i \quad ; \quad x_2 = -i \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = -1$$

2. $(x^2 - x - 6)^2 = 0 \quad ; \quad x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$

de donde:

$$x_5 = x_6 = -2 \quad ; \quad x_7 = x_8 = 3$$

Para determinar el orden de multiplicidad de las raíces se realizan las siguientes consideraciones:

1. los valores x_1 y x_2 se desestiman por ser complejos;
2. el valor x_3 anula el denominador; por lo tanto:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - 1)(x^2 - x - 6)^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x - 6)}{(x - 1)(x^2 + 4)} = -48$$

3. el valor x_4 no anula el denominador y, por lo tanto, es raíz de la función;
4. Los valores $x_5 = x_6$ anulan el denominador; por lo tanto:

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x^4 - 1)(x^2 - x - 6)^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^4 - 1)(x + 2)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)}{(x + 2)(x^2 - 3x + 8)} = 0$$

5. finalmente, los valores $x_7 = x_8$ no anulan el denominador y son por lo tanto raíces de la función.-

Resumiendo: la función algebraica racional fraccionaria dada tiene las siguientes raíces: $x = -1$ (raíz simple); $x = 3$ (raíz doble) y $x = -2$ (raíz simple). ($x = -2$ es raíz simple porque uno de los factores $(x + 2)$ del numerador se ha eliminado por figurar también en el denominador).-

IX.3.- Asíntotas.- Una función algebraica racional fraccionaria puede tener las siguientes clases de asíntotas: vertical, horizontal, oblicua (lineal o parabólica).-

a) Dada una función algebraica racional fraccionaria cualesquiera:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

asíntota vertical de la misma es todo valor real de su variable x independiente que anule a Q(x), pues entonces es:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{0} = \infty$$

El valor de la variable x se llama polo o infinito de la función dada.-

Cuando un determinado valor de la variable x independiente de la función algebraica racional fraccionaria anula tanto a Q(x) como a P(x), si su límite $1 = \infty$ también allí la función dada tiene una asíntota vertical.-

Sean x_1, x_2, x_3, ..., x_i raíces (reales o complejas) del polinomio Q(x) de una función algebraica racional fraccionaria. Fácilmente es posible factorearlo escribiendo:

$$Q(x) = b_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_i)$$

donde b_0 es el coeficiente del término de mayor grado.- Figurando un mismo factor $x - x_i$ k veces, se dice que x_i es raíz múltiple de orden k en dicho polinomio, y así entonces: si $k = 1$, x_i será asíntota simple de la función racional fraccionaria dada; si $k = 2$, x_i será asíntota doble; si $k = 3$, x_i lo será triple, etc.-

También, y al igual que en el cálculo de raíces de f(x) -ver parágrafo IX.2-, se demuestra que: si una determinada raíz del polinomio Q(x) de la función algebraica racional fraccionaria es valor múltiple de orden impar que anula a dicho polinomio, la función cambia de signo en ese punto; en cambio, si tal valor es raíz múltiple de orden par, aquélla conserva el mismo signo, refiriéndose tan solo esta conclusión a raíces reales que anulen a Q(x).-

Ahora bien: como el número de raíces de un polinomio siempre es igual a su grado, puede afirmarse que: el número de asíntotas verticales de una función algebraica racional fraccionaria no supero el grado de su denominador Q(x), desechándose las raíces complejas.-

EJEMPLO: a) Dada la siguiente función algebraica racional fraccionaria calcular sus asíntotas verticales y determinar su orden de multiplicidad:

$$y = f(x) = \frac{2(16 - x^2)(x+1)}{x^3 - 9x}$$

Las posibles asíntotas de la función dada son raíces del polinomio que forma el denominador de la misma; por lo tanto corresponde resolver su ecuación, resultando:

$$x^3 - 9x = 0$$
$$x(x^2 - 9) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad ; \quad x_3 = -3$$

Todas las asíntotas verticales son simples.-

b) Dada una función algebraica racional fraccionaria cualesquiera:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si se verifica que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = l$$

resultando:

$l = 0$ de donde $y = f(x) = 0$ si $m < n$

o sino:

$l = \frac{a_o}{b_o}$ de donde $y = f(x) = \frac{a_o}{b_o}$ si $m = n$

y finalmente:

$l = \infty$ de donde $y = f(x) = \infty$ si $m > n$

obtiénense en dicha función asíntotas horizontales.-

Lo dicho implica las siguientes reglas:

1. si el grado m del numerador de una función algebraica racional fraccionaria es menor al de su denominador (m<n), la misma tiene por asíntota horizontal el eje de abscisas, vale decir la recta $y = f(x) = 0$;

2. si los grados m y n del numerador P(x) y denominador Q(x), respectivamente, de una función algebraica racional fraccionaria, son iguales (m = n), siendo a_o y b_o los correspondientes coeficientes del término mayor de su numerador P(x) y denominador Q(x), la función tiene por asíntota horizontal la recta $y = f(x) = \frac{a_o}{b_o}$;
3. si el grado m del numerador P(x) de una función algebraica racional fraccionaria es mayor al de su denominador n (m> n), la misma no tiene asíntota horizontal pues la ordenada no tiende a ningún valor finito al crecer la variable x independiente de la función. Entonces existen asíntotas oblícuas (lineales o parabólicas).-

EJEMPLO: a) Dada la siguiente función algebraica racional fraccionaria calcular sus asíntotas horizontales:

$$y = f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 5}$$

De acuerdo a lo dicho resulta ser la recta y = 2 asíntota horizontal de la función dada.-

c) Dada una función algebraica racional fraccionaria cualesquiera:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si se verifica que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = l$$

resultando:

$l = \frac{a_o}{b_o}$ de donde $y = f(x) = \frac{a_o}{b_o}$ si $m = n$

o sino

$l = \infty$ de donde $y = f(x) = \infty$ si $m > n$

es posible efectuar la división (entera) $\frac{P(x)}{Q(x)}$, resultando:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde C(x) y R(x), respectivamente son cociente y resto de la operación efectuada. Como el grado de R(x) es menor que el grado de Q(x):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R(x)}{Q(x)} = \infty$$

de donde resulta entonces que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) \qquad (1)$$

Como bien sabemos, la expresión (1) significa que al aumentar /x/ los puntos de la función algebraica racional fraccionaria dada, cada vez se sitúan más próximos a la función C(x).-

Si los grados m y n del numerador P(x) y denominador Q(x) de la función racional fraccionaria dada son iguales (m = n), $C(x) = \frac{a_o}{b_o}$, expresión

concordante con b-2) del presente parágrafo.-

1. Si los grados m y n del numerador $P(x)$ y denominador $Q(x)$ de la función racional fraccionaria dada, guardan la relación $m-n=1$, o sea: si m es mayor en un grado que n, $C(x)$ es función lineal:

$$C(x) = c_o x + c_1$$

en consecuencia: la función algebraica racional fraccionaria dada tiene por asíntota oblícua una recta, donde $c_o = \frac{a_o}{b_o}$ y $c_1 = \frac{a_1 b_o - a_o b_1}{b_o^2}$

2. Finalmente, si los grados m y n del numerador $P(x)$ y denominador $Q(x)$ de la función algebraica racional fraccionaria dada, guardan la relación $m-n=p$ $(p>1)$, o sea: si m es mayor en más de un grado que n, $C(x)$ es función algebraica racional entera de grado p:

$$C(x) = c_o x^p + c_1 x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \ldots + c_{p-1} x + c_p$$

que representada gráficamente da una parábola.-

En resumen: la función algebraica racional fraccionaria tiene tantas asíntotas verticales como raíces reales (distintas) existan en su denominador $Q(x)$, siempre que no anulen a su numerador $P(x)$, y además una curva asintótica cuya ecuación es el cociente (entero) de su numerador $P(x)$ y su denominador $Q(x)$.-

EJERCICIO: a) Dada la siguiente función algebraica racional fraccionaria, calcular su asíntota oblícua:

$$y = f(x) = \frac{x^5 + 5x^4 - 56x^3 - 280x^2}{2x^4 - 144x^2 + 2592}$$

Efectuando el cociente y factoreando el resto se obtiene:

$$y = f(x) = \frac{1}{2} x + \frac{5}{2} + \frac{8(x+5)(x^2-81)}{(x^2-36)^2}$$

En consecuencia: la asíntota oblícua (lineal) de la función algebraica racional fraccionaria dada, corresponde a la función:

$$y = f(x) = \frac{1}{2} x + \frac{5}{2}$$

IX.4.- <u>Intersecciones</u>.- La curva representativa de una función algebraica racional fraccionaria no tiene intersecciones con sus asíntotas verticales, pero sí con sus asíntotas: horizontal, oblícua (lineal o parabólica). Para determinar, en tal eventualidad, los puntos de intersección de la curva representativa de la función con las asíntotas mencionadas, debe resolverse la ecuación:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$$

de donde se deduce:

$$P(x) - Q(x) \cdot C(x) = 0 \qquad (1)$$

Siendo m y n los grados del numerador $P(x)$ y denominador $Q(x)$ de la función racional fraccionaria, resultará en la expresión (1) el producto de polinomios $Q(x) \cdot C(x)$ de grado: $n + m - n = m$, por ser $C(x)$ de grado $m-n$. Luego: si convenimos en que a_o, b_o y $\frac{a_o}{b_o}$, respectivamente son los coeficientes de $P(x)$, $Q(x)$ y $C(x)$, reemplazando en (1) resulta:

$$a_o - b_o \frac{a_o}{b_o} = 0$$

es decir que: el término de grado m del polinomio $C(x)$ podrá simplificarse con el de su grado homónimo del polinomio $P(x)$, obteniéndose una ecuación de grado $m-1$, con $m-1$ soluciones (reales o complejas), representativa de los puntos de intersección de la curva y sus asíntotas (horizontales u oblícuas) en la función dada.-

Conclúyese entonces afirmando que: el número de intersecciones de una función algebraica racional fraccionaria con sus asíntotas (no verticales) es como máximo igual a una unidad menos que el grado de su numerador.-

IX.4.- <u>Representación gráfica de funciones racionales fraccionarias.</u>- En el presente parágrafo sintetízase con algunos ejemplos cuanto se ha dicho en el Capítulo y se ha procedido a representar gráficamente las funciones algebraicas racionales fraccionarias.-

a) Estudiar y representar gráficamente la siguiente función algebraica racional fraccionaria:

$$y = f(x) = \frac{2(16-x^2)(x+1)}{x^3 - 9x}$$

1. El intervalo de definición de la función dada lo expresan las siguientes desigualdades:

$$-\infty < x < -3$$
$$-3 < x < 0$$
$$0 < x < 3$$
$$3 < x < \infty$$

2. Las raíces de la función se obtienen resolviendo las ecuaciones que figuran en el numerador de la misma. Entonces:

$$2(16-x^2) = 0 \quad ; \quad 2x^2 = 32 \quad ; \quad x^2 = 16$$
$$x_1 = +4 \quad ; \quad x_2 = -4$$

$$x + 1 = 0$$
$$x_3 = -1$$

y, en consecuencia: $x_1 = 4$; $x_2 = -4$; $x_3 = -1$ son raíces (simples) de la función dada.-

3. Las asíntotas verticales de la función se obtienen resolviendo la ecuación de su denominador. Entonces:

$$x^3 - 9x = 0 \quad ; \quad x(x^2 - 9) = 0$$

$$y_1 = -3 \quad ; \quad y_2 = 0 \quad ; \quad y_3 = 3$$

4. Por ser iguales los grados del numerador y denominador de la función,su asíntota horizontal es la recta $x = -2$

5. Para hallar las intersecciones de la curva representativa de la función con su asíntota horizontal debe resolverse la ecuación:

$$\frac{2(16 - x^2)(x + 1)}{x^3 - 9x} = -2$$

o sea:

$$(16 - x^2)(x + 1) = x^3 - 9x$$

operando:

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

finalmente:

$$x_1 = -1{,}8 \quad ; \quad x_2 = 8{,}8$$

son las intersecciones buscadas.-

6. Calculando el signo de la función en cada intervalo y representando gráficamente los valores obtenidos (figura IX.1) se obtiene la curva buscada, resultando dos ramas parabólicas (comprendidas entre asíntotas paralelas) y dos ramas hiperbólicas (comprendidas entre asíntotas no paralelas).-

b) Estudiar y representar gráficamente la siguiente función algebraica racional fraccionaria:

$$y = f(x) = \frac{x^5 + 5x^4 - 56x^3 - 280x^2}{2x^4 - 144x^2 + 2592}$$

1. El intervalo de definición de la función dada lo expresan las siguientes desigualdades:

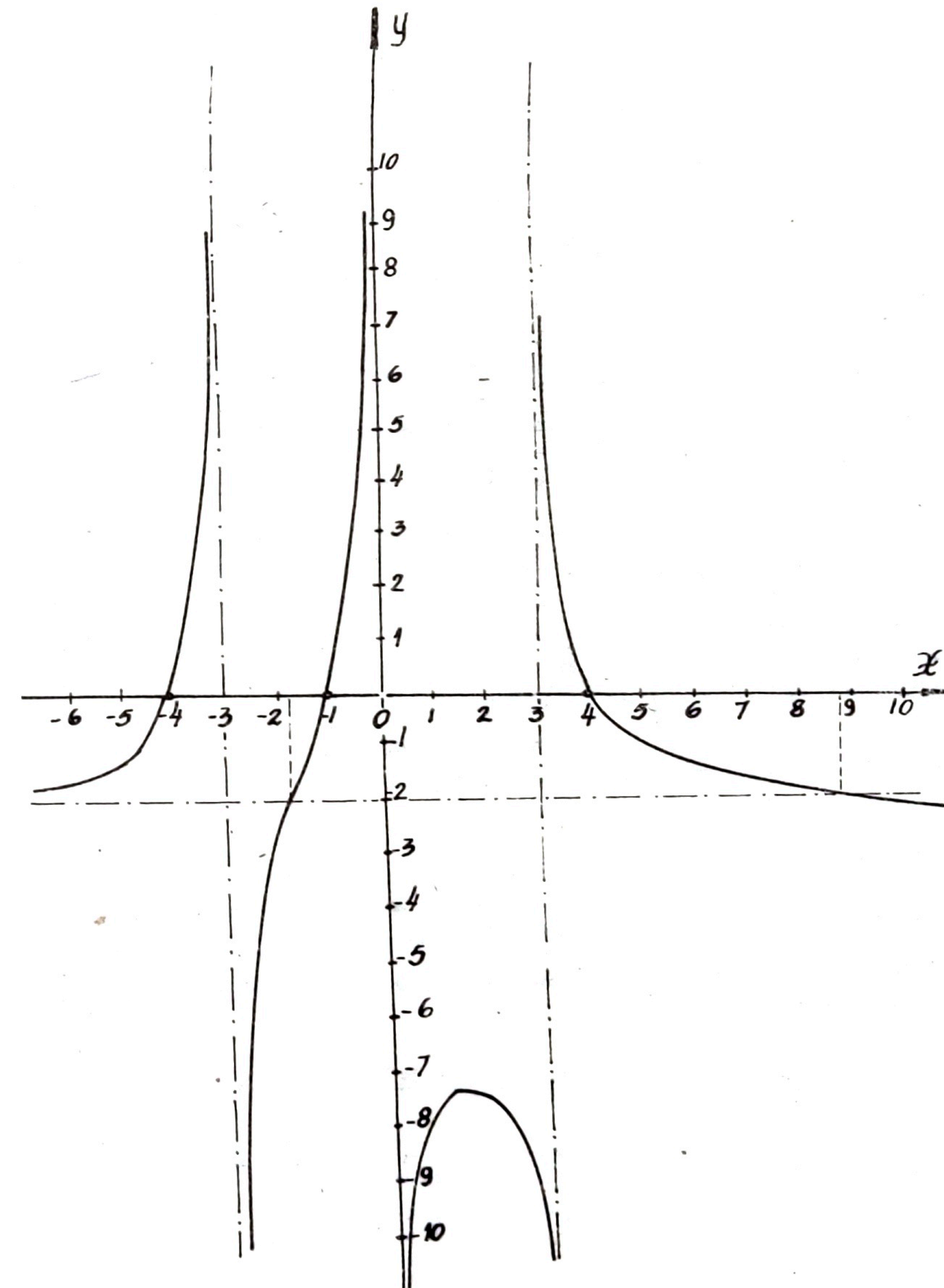
$$-\infty < x < -6$$
$$-6 < x < 6$$
$$6 < x < \infty$$

2. Las raíces de la función se obtienen resolviendo las ecuaciones que figuran en el numerador de la misma. Entonces factoreando la ecuación de la función:

$$y = f(x) = \frac{x^2(x^3 + 5x^2 - 56x - 280)}{2\,(x^4 - 72x^2 + 1296)}$$

$$y = f(x) = \frac{x^2(x + 5)(x^2 - 56)}{2(x^2 - 36)^2} \qquad (1)$$

Luego:resolviendo las ecuaciones del numerador resulta:



- figura IX.1 -

$x^2 = 0$ de donde $x_1 = 0$ (doble)

$x + 5 = 0$ de donde $x_2 = -5$ (simple)

$x^2 - 56 = 0$ de donde $x_3 = -7{,}48$ (simple)

$x_4 = 7{,}48$ (simple)

3. Las asíntotas verticales se obtienen resolviendo las ecuaciones del denominador de la función dada. Entonces, de la expresión (1) resulta:

$2(x^2 - 36)^2 = 0$ de donde $y_1 = -6$ (doble)

$y_2 = 6$ (doble)

4. Por ser el grado del numerador mayor en una unidad que el respectivo del denominador de la función dada, resulta una asíntota oblícua (lineal). Para calcular su ecuación, efectuando el cociente entre numerador y denominador y factoreando el resto resulta:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + \frac{8(x+5)(x^2-81)}{(x^2-36)^2} \qquad (2)$$

Luego la asíntota oblícua (lineal) tiene por ecuación:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

5. Las intersecciones de la curva representativa de la función con su asíntota oblícua se calculan así: los valores de x que anulan el tercer término de la expresión (2) hacen que la ordenada de la curva coincida con la correspondiente a la de su asíntota en ese punto, porque el valor de y queda expresado por los dos primeros términos de dicha ecuación; en consecuencia, resolviendo únicamente la ecuación:

$$8(x+5)(x^2-81) = 0$$

se obtienen las intersecciones buscadas. Resulta:

$x'_1 = -9$; $x'_2 = -5$; $x'_3 = 9$

6. Calculando el signo de la función en cada intervalo y representando gráficamente los valores obtenidos (figura IX.2) se obtiene el diagrama buscado resultando dos ramas hiperbólicas y una parabólica.-

c) Estudiar y representar gráficamente la siguiente función algebraica racional fraccionaria:

$$y = f(x) = \frac{x^5 + 8x^4 + 20x^3 + 16x^2 + 225}{5x^3 + 20x^2}$$

1. El intervalo de definición de la función dada lo expresan las siguientes desigualdades:

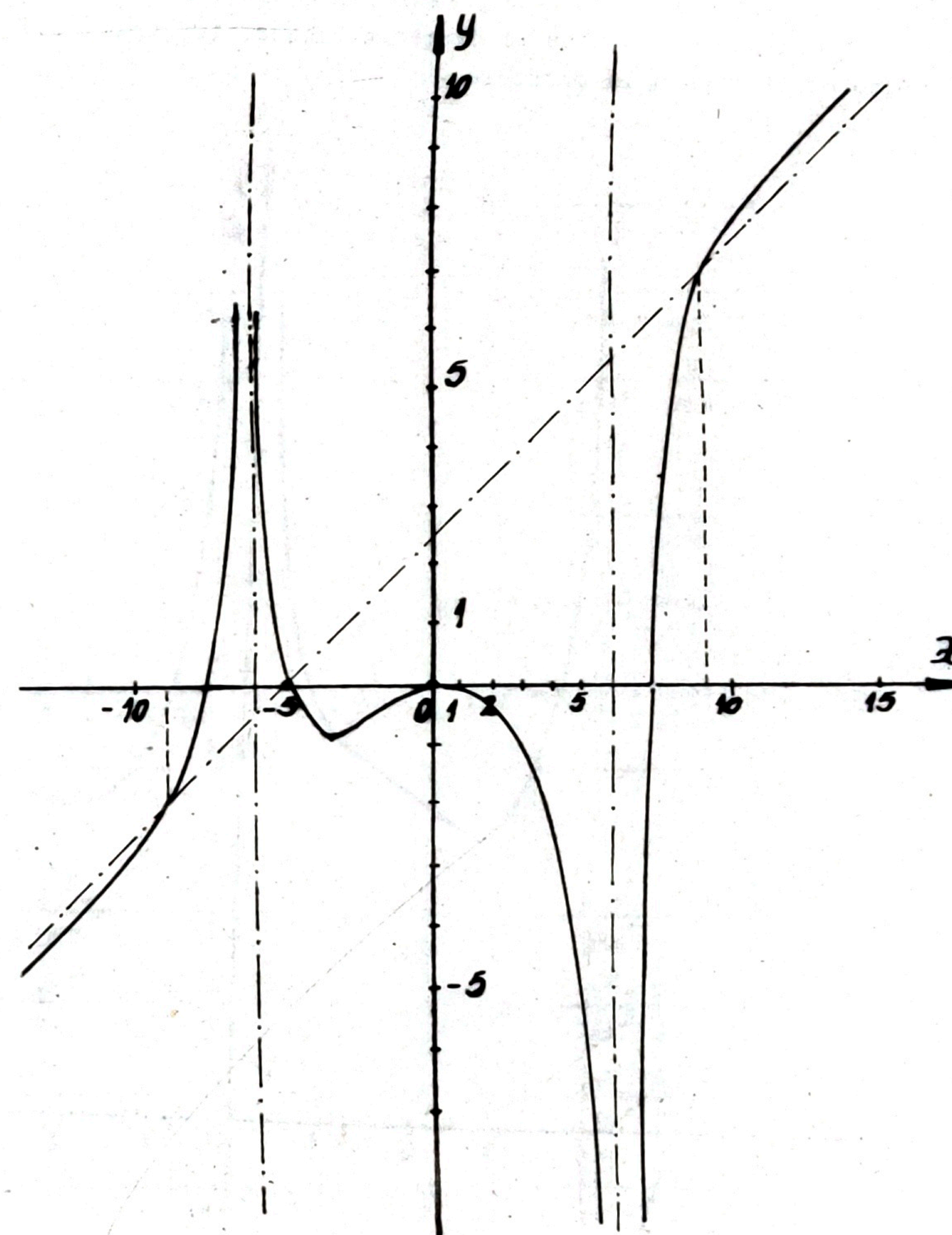
$$-\infty < x < -5$$
$$-5 < x < 0$$
$$0 < x < \infty$$

2. La única raíz real del umerador es $x = -5$.-

3. Las asíntotas verticales se determinan resolviendo la ecuación:

$5x^3 + 20x^2 = 0$; $5x^2(x + 4) = 0$

$y_1 = 0$ (doble) ; $y_2 = -4$



- figura IX.2 -

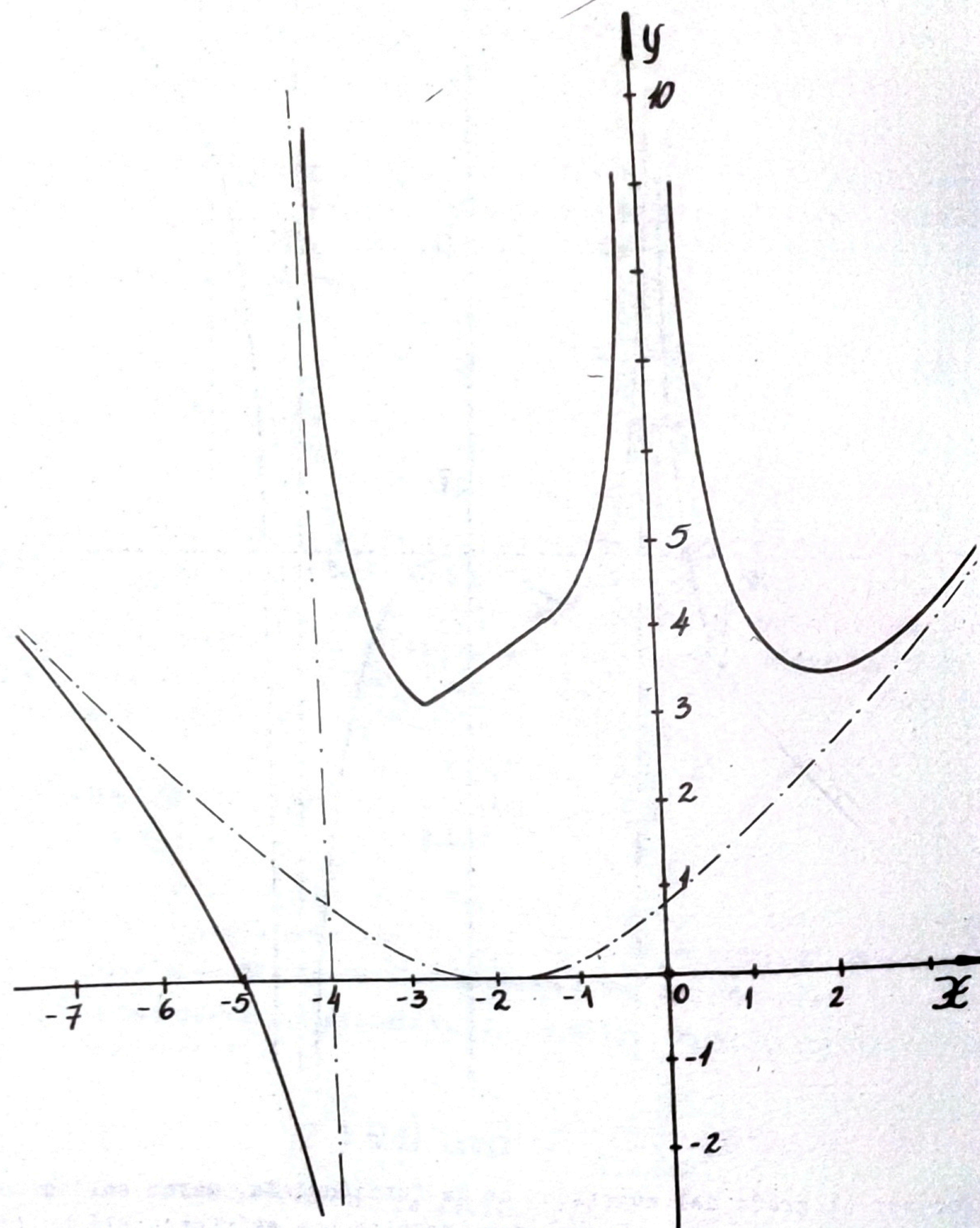
4. Por ser el grado del numerador de la función dada, mayor en dos unidades que el respectivo del denominador, resulta una asíntota oblícua (parabólica). Para calcular su ecuación, efectuando el cociente entre numerador y denominador, resulta:

$$y = \frac{(x+2)^2}{5} + \frac{45}{x^3 + 4x^2} \qquad (1)$$

5. La curva no tiene intersecciones con su asíntota oblícua (parabólica) - porque en la expresión (1) el resto tiene numerador constante.-

6. Calculando el signo de la función dada en cada intervalo, representando

gráficamente los valores obtenidos y calculando algunos valores para la variable independiente se obtiene el diagrama buscado (figura IX.3) resultando el mismo asintótico a la parábola.-



- figura IX.3 -

EJERCICIOS: a) Estudiar y representar las siguientes funciones racionales fraccionarias:

$y = \dfrac{2}{3x^2 - 17x + 10}$; $y = \dfrac{3}{7 - 5x - 2x^2}$

$y = \dfrac{3}{2 + x - 3x^2}$; $y = \dfrac{4}{x^2 - 100x + 2400}$

$y = \dfrac{6}{4x^2 - 16x - 17}$; $y = \dfrac{42}{24x - 16x^2 + 29}$

$y = \dfrac{15}{12x + 7 - 9x^2}$; $y = \dfrac{75}{25x^2 + 20x - 29}$

b) Idem a):

$y = \dfrac{36}{x^2 - 4x + 13}$; $y = \dfrac{10}{2x - 3 - x^2}$

$y = \dfrac{6}{4x^2 - 16x + 17}$; $y = \dfrac{42}{24x - 16x^2 - 29}$

$y = \dfrac{15}{12x - 7 - 9x^2}$; $y = \dfrac{75}{25x^2 + 20x + 29}$

c) Idem b):

$y = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2}$; $y = \dfrac{x + 1}{(x - 1)^2}$

$y = \dfrac{2 - 3x}{x^2 + 3x + 2}$; $y = \dfrac{x - 1}{(2x - 7)^2}$

$y = \dfrac{2x - 9}{2x^2 - x - 10}$; $y = \dfrac{-3(x + 1)}{(x - 2)^2}$

$y = \dfrac{x + 2}{11x - 3x^2 - 6}$; $y = \dfrac{3 - x}{(1 + 2x)^2}$

d) Idem c):

$y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 8x - 4}$; $y = \dfrac{-6x^2 - 7x + 3}{9x^2 + 6x + 1}$

$y = \dfrac{-x^2 + 5x + 24}{3x^2 - 7x - 6}$; $y = \dfrac{4x^2 + 20x + 21}{16x^2 - 24x + 9}$

$y = \dfrac{4x^2 - 12x + 9}{3x^2 - 2x - 65}$; $y = \dfrac{4x^2 - 4x + 5}{18x^2 - 23x - 6}$

$y = \dfrac{25x^2 + 20x + 4}{-2x^2 + 3x - 1}$; $y = \dfrac{3x^2 - 17x + 10}{9x^2 - 12x + 7}$

e) Idem d):

$y = \dfrac{x^2 + x - 2}{(2x+7)(x+1)(x-2)}$; $y = \dfrac{2x^2 + 15x + 25}{(x^2-4)(x - 5)}$

$y = \dfrac{3x^2 - 7x - 66}{(x^2-4)(2x - 9)}$; $y = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{(x^2 + x - 6)(x-2)}$

$y = \dfrac{2x^2 - 11x + 12}{(x+2)^2(x-3)}$; $y = \dfrac{1 - x^2}{x^3 + 25x}$

$y = \dfrac{-(x + 2)^2}{x^3 - 6x^2 + 8x}$; $y = \dfrac{5x^2 + 29x + 36}{(1-x)(x^2 + 4)}$

f) Idem e):

$$y = \frac{(3+x)(5+x)(4-x)}{(4-x^2)(5-x)} \quad ; \quad y = \frac{(x-4)^2(x-8)}{x^3-6x^2+9x}$$

$$y = \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(x+1)^2(x-4)} \quad ; \quad y = \frac{(x+2)(3x^2-20x+28)}{16x-x^3}$$

$$y = \frac{2(9-x^2)(3-x)}{(2-x-x^2)(2+x)} \quad ; \quad y = \frac{9x^3-25x}{8x^3-60x^2+150x-125}$$

$$y = \frac{2x^3-13x}{(x-2)(x-4)(x-6)} \quad ; \quad y = \frac{(2x^2+13x+18)(2x+9)}{9x-x^3}$$

g) Idem f):

$$y = \frac{(x^2-9)(x^2+4x-5)}{4x^3+25x} \quad ; \quad y = \frac{-2(x^4+11x^3+28x^2)}{(3x+2)(x^2+9x+18)}$$

$$y = \frac{(x^2-25)(4x^2-9)}{(x-3)(3x+10)^2} \quad ; \quad y = \frac{(1-x^2)(49-x^2)}{49x-9x^3}$$

$$y = \frac{(x^2-6x+5)(x^2+6x+5)}{(x-4)(2x^2-11x+12)} \quad ; \quad y = \frac{(4-x^2)(x-4)(x+4)}{x^3+3x^2+3x+1}$$

$$y = \frac{(x^2+x-12)(x^2-x-12)}{(4x^2-9)(2x+3)} \quad ; \quad y = \frac{x^4-2x^2+1}{(3-2x)(5-2x)^2}$$

h) Idem g):

$$y = \frac{x^4-17x^2+16}{6x^2+x-40} \quad ; \quad y = \frac{(x^4-5x^2+4)(x+3)}{4x^3+2}$$

$$y = \frac{x^4-10x^2+9}{-8x^2+54x-63} \quad ; \quad y = \frac{(x^2-1)(x^2-10x+21)(x-5)}{3x^3-11x^2}$$

$$y = \frac{20x^2-x^4-64}{5x^2} \quad ; \quad y = \frac{(x^2-25)(x^2-36)(x+2)}{225x-16x^3}$$

$$y = \frac{x^4-11x^3+28x^2}{4x^2-20x+25} \quad ; \quad y = \frac{(x+4)(x^4-256)}{49x-4x^3}$$

i) Idem h):

$$y = \frac{x^5}{4-x^2} \quad ; \quad y = \frac{(x^4-1)(x^2-9)}{x^3-4x}$$

$$y = \frac{(x+5)(x^2-1)^2}{x^2-9} \quad ; \quad y = \frac{(x^4-81)(x^2-1)}{x^3-2x}$$

$$y = \frac{(x^2-1)(x^2-9)(x-4)}{x^2} \quad ; \quad y = \frac{(x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)}{(x+2)^2(x-4)}$$

$$y = \frac{(x^4-16)(x+2)}{(x-1)^2} \quad ; \quad y = \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{(x^2-16)(x-6)}$$

IX.5.- Hipérbolas.- a) GENERALIDADES: llámase hipérbola la función expresada por la siguiente relación:

$$(1) \quad y = f(x) = \frac{a}{Q(x)} = \frac{a}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio ordenado decrecientemente en el término variable x, obteniéndose tal expresión como tipo particular de función algebraica racional fraccionaria $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x) = a$ = constante.-

Las hipérbolas son funciones recíprocas de las parábolas. En efecto: si

$$y = f(x) = P(x)$$
$$y = g(x) = \frac{1}{Q(x)}$$

se deduce:

$$P(x) = \frac{1}{Q(x)}$$

Estudiemos los distintos tipos de hipérbolas.-

b) Tipo $f(x) = \frac{a}{x^n}$.- De la expresión (1) y haciendo $Q(x) = x^n$ surge la relación:

$$y = f(x) = \frac{a}{x^n} \qquad (2)$$

cuyo análisis en particular iniciamos.-

El intervalo de definición está dado por las desigualdades:

$$-\infty < x < 0 \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

1. Si la constante a es positiva ($a > 0$) y n es igual a la unidad ($n = 1$), la **expresión (2) toma su forma más simple:**

$$y = f(x) = \frac{a}{x} \qquad (3)$$

La función (3) es impar dado que para valores opuestos de su **variable independiente** resultan también valores opuestos para aquella; **luego: $-f(x) = f(-x)$. Asimismo, la función (3) define la proporcionalidad inversa entre sus variables x, y, porque:**

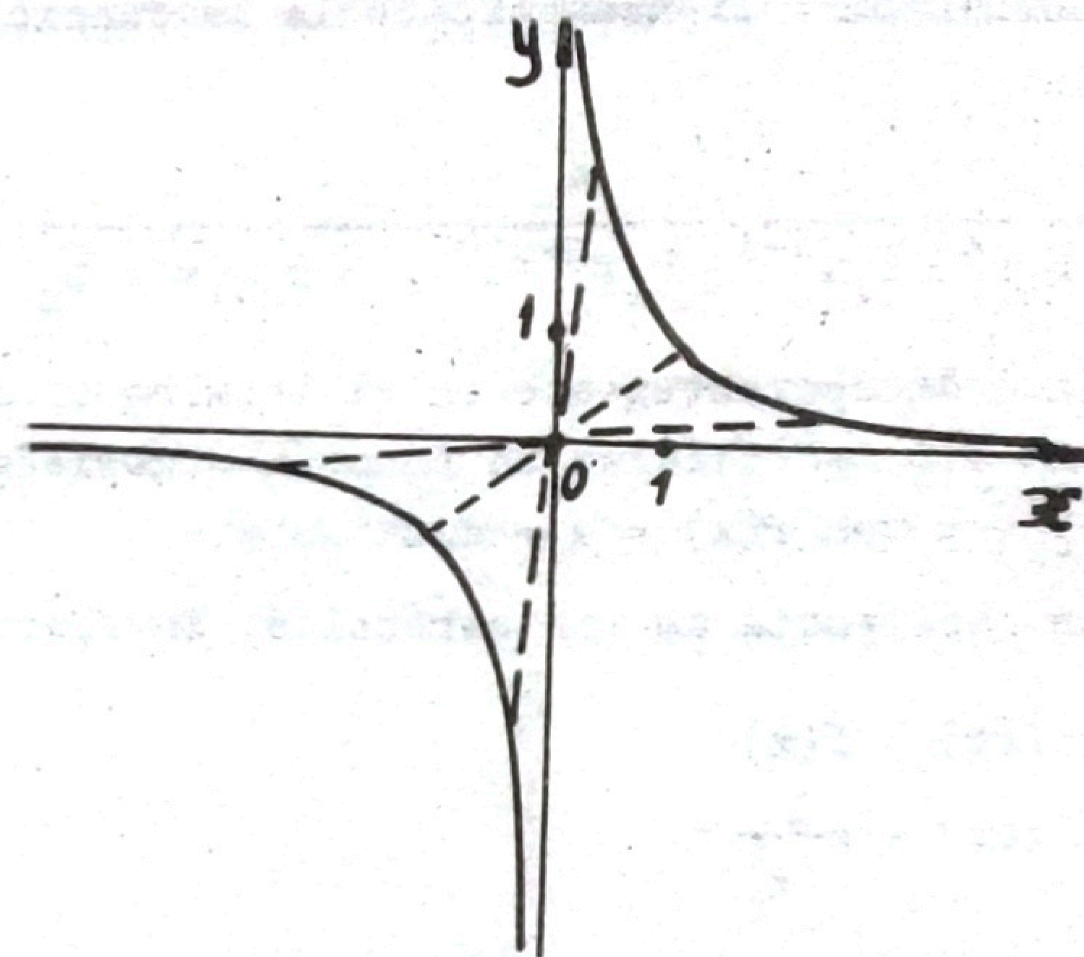
$$x \cdot y = a = \text{constante}$$

siendo a el factor de proporcionalidad. Su gráfica, por tal razón, se llama hipérbola equilátera.-

Cuando la variable x independiente toma valores positivos (crecientes), f(x) es positiva (decreciente); en consecuencia, los puntos correspondientes del diagrama representativo de la función tienen abscisas y ordenadas positivas (figura IX.4) ubicándose en el primer cuadrante, en tanto que los ejes, de abscisas y ordenadas, son asíntotas -horizontal y vertical, respectivamente- de la curva:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$$

Análogamente: para valores negativos (crecientes) de la variable x independiente resultan también valores negativos (decrecientes) de f(x); en consecuencia: la curva representativa de la función ubícase en el tercer cuadrante. Unos pocos puntos permiten construirla con suficiente aproximación (figura IX.4).-

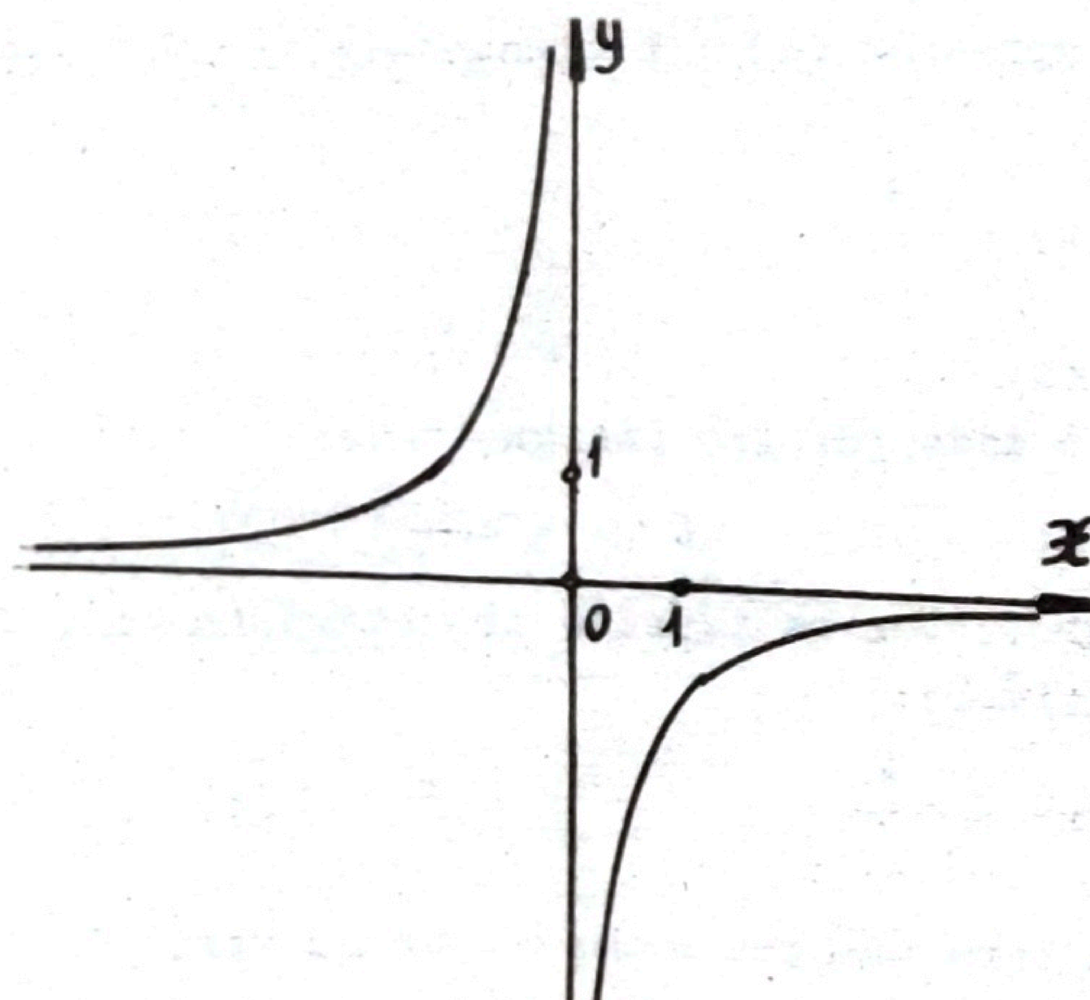


- figura IX.4 -

2. Si la constante a es negativa y n es igual a la unidad (n = 1), la expresión (2) toma la forma:

$$y = f(x) = -\frac{a}{x} \quad (4)$$

obteniéndose por representación gráfica una curva análoga a la representada en la figura IX.4 pero simétrica del eje de abscisas, ubicándose sus ramas en los cuadrantes segundo y cuarto (figura IX.5).-



- figura IX.5 -

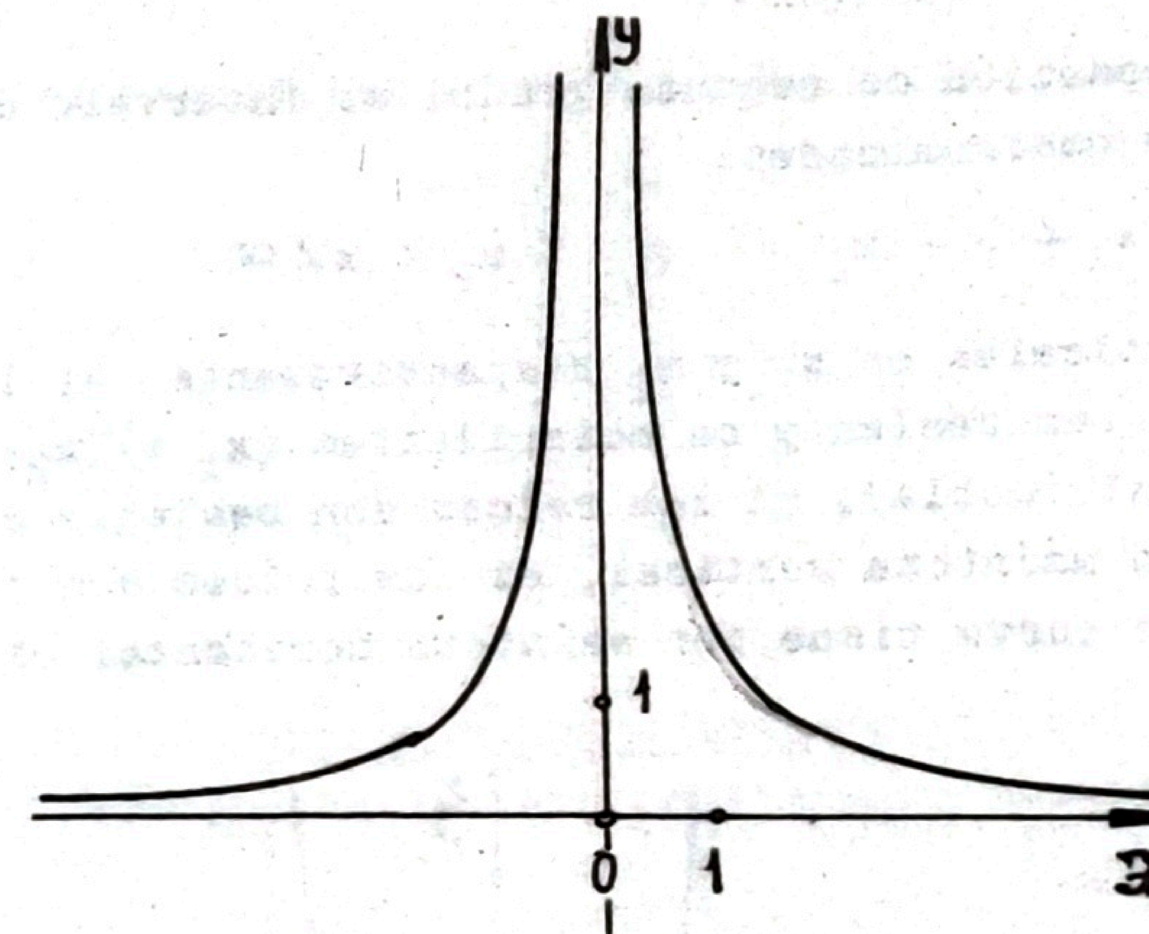
Debe advertirse que el origen O del sistema de coordenadas cartesianas es centro de simetría de la hipérbola, propiedad importante que permite construir por simetría una rama en base a la otra.-

Resumiendo: la función $y = f(x) = \frac{a}{x}$ tiene por diagrama una curva que consta de dos ramas, simétricas con respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas y asintóticas, horizontal y verticalmente, a los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente.-

3. Sea la constante a positiva y n natural o racional positivo par; la función toma la expresión (2) y es par, o sea que para valores opuestos de la variable x independiente resultan los mismos valores para aquélla. Luego: f(x) = -f(x).-

Cuando la variable x independiente toma valores positivos (crecientes), f(x) también toma valores positivos (decrecientes); los puntos correspondientes del diagrama representativo de la función tienen abscisas y ordenadas positivas (figura IX.6) ubicándose en el primer cuadrante, en tanto que los ejes de abscisas y ordenadas son asíntotas -horizontal y vertical, respectivamente- de la curva. Cuando la variable x independiente toma valores negativos (crecientes) la función toma valores positivos (decrecientes); en consecuencia, la curva representativa de f(x) ubícase en el segundo cuadrante. El trazado de unos pocos puntos permite construirla con suficiente aproximación (figura IX.6).-

4. Si la constante a es negativa y n natural o racional positivo par, la función tiene por representación gráfica una curva simétrica de la representada en la figura IX.6 respecto del eje de abscisas y origen O del sistema de coordenadas, ubicándose en los cuadrantes tercero y cuarto.-



- figura IX.6 -

5. Si es n natural o racional positivo impar, la relación (2) sintetiza también la función, obteniéndose, según sea a positivo o negativo, una curva análoga a las anteriores (figuras IX.4 a 6) que se ubica en los cuadrantes primero y tercero, o segundo y cuarto, respectivamente.-

6. Si es n negativo resulta una función algebraica racional entera:

$$y = f(x) = ax^{-(-n)} = ax^{n}$$

cuya representación gráfica es una parábola.-

c) Tipo $f(x) = \frac{a}{Q(x)}$.- En su expresión general la hipérbola toma la forma de la relación (1), donde Q(x) es un polinomio ordenado decrecientemente en el término variable x.-

1. La forma más simple de la expresión (1) viene dada por la relación:

$$y = \frac{a}{mx + n}$$

o sea: cuando Q(x) = mx + n es un polinomio de primer grado.-

Las desigualdades $-\infty < x < -\frac{n}{m}$ y $-\frac{n}{m} < x < \infty$, definen el campo de variabilidad de la función considerada, existiendo una asíntota vertical en el punto $x = -\frac{n}{m}$, dado que:

$$\lim_{x \to -\frac{n}{m}} \frac{a}{mx + n} = \infty$$

La representación gráfica de la función dada también es una hipérbola equilátera (figura IX.7), cuyas ramas, asintóticas horizontal y verticalmente al eje de abscisas y recta $x = -\frac{n}{m}$ respectivamente, pertenecen a los cuadrantes primero y tercero o segundo y cuarto, según sean los signos de la función.-

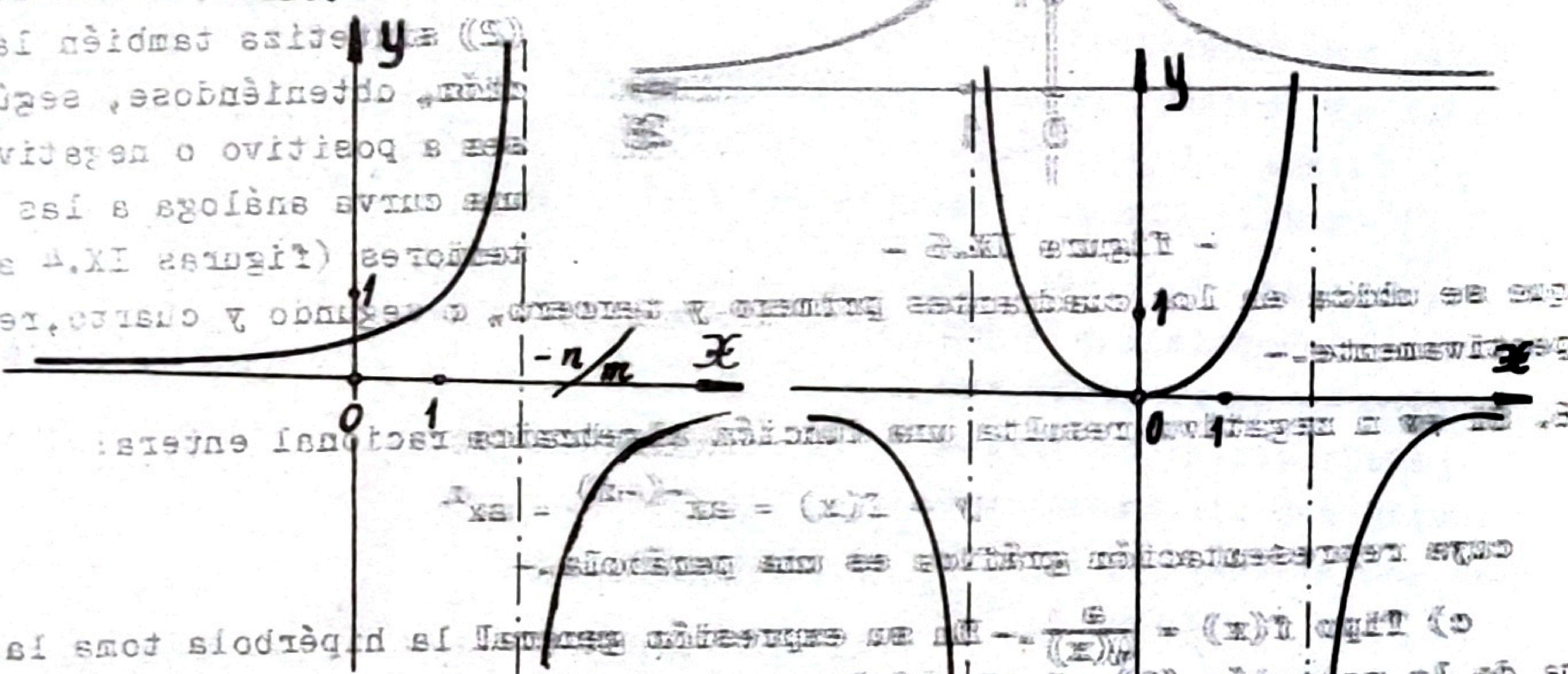
2. Si $Q(x) = bx^2 + cx + d$ es un polinomio de segundo grado, la expresión (1) se transforma así:

$$y = f(x) = \frac{a}{bx^2 + cx + d}$$

Siendo x_1 y x_2 raíces de la ecuación de segundo grado, su intervalo de definición viene dado por las desigualdades:

$$-\infty < x < x_1 \quad ; \quad x_1 < x < x_2 \quad ; \quad x_2 < x < \infty$$

resultando: dos asíntotas verticales en x_1 y x_2 respectivamente, si las raíces del término cuadrático son reales y no coincidentes ($x_1 \neq x_2$); o solamente una asíntota vertical (doble), si las raíces son reales y coincidentes ($x_1 = x_2$); o ninguna asíntota vertical, si las raíces son complejas. En todos los casos, la curva tiene por asíntota horizontal al eje de abscisas.-



- figura IX.7 -   - figura IX.8 -

Cuando las raíces, x_1 y x_2, del término cuadrático son reales y distintas, la curva representativa de la función tiene tres ramas (figura IX.8). La primera y tercera son hiperbólicas y la segunda parabólica. Considerando los signos de la función unos pocos puntos permiten construirla con suficiente aproximación.-

Cuando las raíces, x_1 y x_2, del término cuadrático son reales y coincidentes, la curva representativa de la función consta de dos ramas hiperbólicas.-

En la práctica, para representar hipérbolas es necesario tener en cuenta las siguientes reglas:

1. en las proximidades de todo valor de la variable x independiente que anula el denominador, las ordenadas crecen tanto más, cuanto más nos acercamos a dicho valor de aquella, existiendo en dicho punto una asíntota vertical;
2. la aproximación a una asíntota vertical es en ordenadas positivas o negativas según el signo de la función en las proximidades de ese valor;

3. Al crecer el valor de la variable x independiente, el denominador también crece y, por lo tanto, el cociente $\frac{a}{Q(x)}$ decrece, resultando la curva asintótica al eje de abscisas.-

EJERCICIOS: a) Representar la función:

$$y = \frac{a}{bx + c}$$

para los siguientes valores de a, b, c:

$a = b = 1$; $c = 0$;	$a = 2$; $b = -5$; $c = 0$;	$a = -7$; $b = -2$; $c = 4$
$a = b = -1$; $c = 0$;	$a = 3$; $b = 2$; $c = 0$;	$a = -3$; $b = 7$; $c = 20$
$a = -b = 1$; $c = 0$;	$a = -4$; $b = -3$; $c = 0$;	$a = 5$; $b = -4$; $c = -9$
$-a = b = 1$; $c = 0$;	$a = -3$; $b = -7$; $c = 0$;	$a = 6$; $b = 5$; $c = -8$
$a = b = -1$; $c = 0$;	$a = 5$; $b = -2$; $c = 0$;	$a = -2$; $b = -9$; $c = 18$
$a = -b = -1$; $c = 0$;	$a = -2$; $b = 9$; $c = 0$;	$a = 3$; $b = 5$; $c = -12$

IX.6.- Función homográfica.- De importancia es el estudio de la función algebraica racional fraccionaria dada por la relación:

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (1)$$

donde $P(x) = ax + b$ y $Q(x) = cx + d$ son polinomios de primer grado en el término variable x, y también conocida por el nombre de función homográfica. Su estudio es objeto del presente parágrafo.-

Basta observar que, si $c = 0$, haciendo $\frac{a}{d} = m$ y $\frac{b}{d} = n$ se obtiene una función algebraica racional entera de primer grado del tipo:

$$y = f(x) = mx + n$$

por tal motivo entonces debe suponerse siempre a $c \neq 0$.-

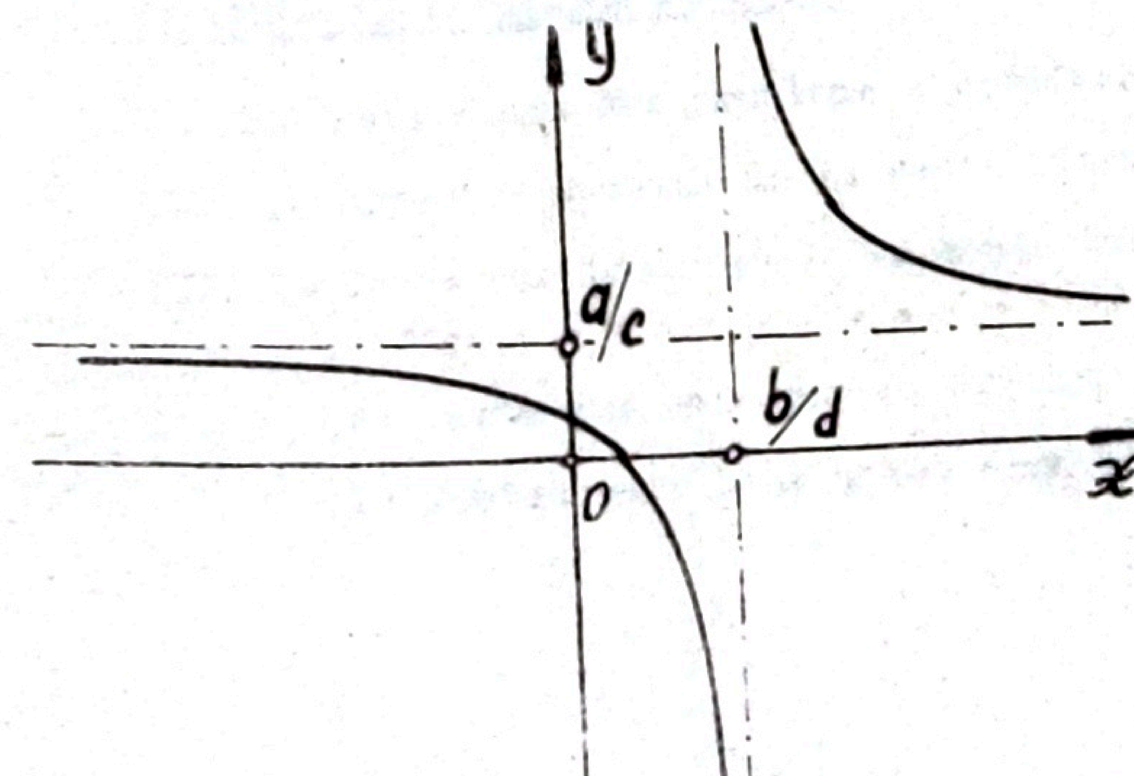
El cociente $\frac{ax + b}{cx + d}$ conduce a la expresión:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx + d)}$$

y, si $bc - ad = 0$, entonces:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$$

resultando por representación gráfica una recta paralela al eje de abscisas.-



- figura IX.9 -

Resumiendo: consideraremos como función homográfica la relación (1), donde a, b, c, d, son constantes, siempre que $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$.-

Las desigualdades siguientes:

$$-\infty < x < -\frac{d}{c}$$

$$-\frac{d}{c} < x < \infty$$

definen su intervalo; en consecuencia en el punto $x = -\frac{d}{c}$ -

existe una asíntota vertical:

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$$

mientras que en el punto $y = \frac{a}{c}$ existe una asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

Raíz de la función homográfica es el punto $x = -\frac{b}{a}$

$$\lim_{x \to -\frac{b}{a}} \frac{ax+b}{cx+d} = 0$$

En definitiva: la curva representativa de la función homográfica consta de dos ramas hiperbólicas asintóticas vertical y horizontalmente a las rectas $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ respectivamente. Unos pocos puntos permiten construirla con suficiente aproximación.-

EJERCICIOS: a) Representar la función homográfica para los siguientes valores de a, b, c, d:

a = 3 ; b = -6 ; c = 2 ; d = 1 ; a = 2 ; b =-8 ; c = 3 ; d =-5
a = 5 ; b = 8 ; c = 4 ; d =-12 ; a =-1 ; b = 2 ; c = 9 ; d = 2
a =-4 ; b = 12 ; c = 7 ; d = 5 ; a = 6 ; b = 6 ; c = 5 ; d =-15

I N D I C E

CAPITULO I: NOCION DE FUNCION.- . . . . pag. 3
I.1.- Constantes y variables . . . . " 4
I.2.- Intervalo de una variable. . . . " 7
I.3.- Valor absoluto . . . . " 8
I.4.- Relación de dependencia entre dos variables.Noción de función . . . . " 11
I.5.- Clasificación de funciones . . . .

CAPITULO II: SISTEMAS DE REPRESENTACION.- " 17
II.1.- Representación gráfica de números reales. . . . " 18
II.2.- Sistema de coordenadas cartesianas. . . . " 21
II.3.- Sistema de coordenadas polares. . . . " 22
II.4.- Fórmulas de pasaje o transformación . . . . " 25
II.5.- Teoría de Proyecciones. . . . .
II.6.- Proyección de un segmento de recta en coordenadas cartesianas . . . . " 28
" 28
II.7.- Distancia entre dos puntos. . . . " 29
II.8.- División de un segmento en una razón dada . . . . " 31
II.9.- Inclinación y pendiente de una recta. . . . " 33
II.10.-Angulo de dos rectas. . . . " 35
II.11.-Cosenos directores de una recta . . . . " 38
Ejercicios a resolver . . . .

CAPITULO III: FUNCION LINEAL.- " 39
III.1.- Naturaleza del problema a estudiar . . . . " 39
III.2.- Ecuación general de la recta (forma explícita) . . . . " 40
III.3.- Casos particulares de la ecuación de la recta (forma explícita). . . . " 40
a) recta que pasa por el origen. . . . " 40
b) rectas paralelas a los ejes coordenados . . . .

III.4.- Función lineal . . . . pag. 43
III.5.- Determinación práctica de la función lineal. . . . . " 46
III.6.- Determinación de la ecuación de una recta en función de uno de sus puntos. . . . . " 46
III.7.- Determinación de la ecuación de una recta en función de dos de sus puntos. . . . . " 46
III.8.- Determinación de la ecuación de una recta en función de su abscisa y ordenada al origen(forma hessiana) . . . . " 47
III.9.- Intersección de dos rectas . . . . " 49
III.10.-Haz de rectas. . . . . " 49
III.11.-Forma normal de la ecuación de la recta. . . . . " 52
III.12.-Distancia de una recta a un punto. . . . . " 54
III.13.-Ecuaciones paramétricas de una curva . . . . " 56
III.14.-Ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta . . . . . . " 57
III.15.-Ecuación polar de una curva. . . . . " 62
III.16.-Distancia entre dos puntos . . . . " 64
III.17.-Ecuación polar de una recta. . . . . " 65
Ejercicios a resolver. . . . . " 68

CAPITULO IV: FUNCIONES RACIONALES ENTERAS.-

IV.1.- Naturaleza del problema a estudiar . . . . " 69
IV.2.- Métodos de estudio: inductivo y deductivo. Elección. . . . . " 70
IV.3.- Campo de existencia de una función . . . . " 72
IV.4.- Función algebraica racional entera: tipo $f(x) = x^n$ . . . . . " 76
a) Generalidades . . . . " 77
b) tipo $f(x) = x^o$. . . . . " 77
c) tipo $f(x) = x^1$. . . . . " 78
d) tipo $f(x) = x^n$(exponente entero y positivo) . . . . " 78
e) tipo $f(x) = x^n$(exponente fraccionario y positivo) . . . . . " 79
f) tipo $f(x) = -x^n$. . . . . " 82
g) Observaciones generales . . . . " 83
IV.5.- Función algebraica racional entera: tipo $f(x) = ax^n$. . . . . " 83
IV.6.- Función algebraica racional entera: expresión general. . . . " 85
IV.7.- Función algebraica racional entera de segundo grado. . . . . " 85

IV.8.- Valor máximo y mínimo de la función de segundo grado. . .pag. 90
IV.9.- Ecuación de la parábola como función de segundo grado . . " 90
IV.10.- Consideraciones interesantes sobre la función algebraica racional entera de segundo grado. . . . . " 91
IV.11.- Intersección de parábola y recta. . . . . " 93
IV.12.- Cónicas . . . . " 95
IV.13.- La elipse como función de segundo grado . . . . " 96
IV.14.- Intersección de elipse y recta. . . . . " 98
IV.15.- La circunferencia como función de segundo grado . . . . . " 98
IV.16.- Intersección de circunferencia y recta. . . . . " 99
IV.17.- Curva algebraica. . . . . " 99
IV.18.- Función algebraica racional entera de tercer grado. . . . . " 99
IV.19.- Ejercicios y problemas. . . . . " 101

CAPITULO V: FUNCIONES TRASCENDENTES.-

V.1.- Naturaleza del problema a estudiar . . . . " 105
V.2.- Función exponencial: tipo $f(x) = a^x$. . . . . " 105
V.3.- Función logarítmica: tipo $f(x) = \log_a x$ . . . . " 108
V.4.- Gráficos logarítmicos. . . . . " 111
V.5.- Funciones trigonométricas. " 116
V.6.- Función sinusoidal: tipo $f(x) = k . \operatorname{sen} (\omega x + \alpha)$. . . . . . . " 119
función tipo: $f(x) = k . \cos (\omega x + \alpha)$ . . . . " 125
V.7.- Sumas y productos de funciones efectuados en forma gráfica " 131
Suma . . . . " 131
Producto . . . . " 134
V.8.- Funciones tipos $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$. . . . . " 138
V.9.- Funciones tipos $f(x) = \sec x$; $f(x) = \operatorname{cosec} x$. . . . . " 140
V.10.- Funciones circulares inversas. . . . . " 141
V.11.- Funciones hiperbólicas: concepto . . . . " 143
V.12.- Propiedades de las funciones hiperbólicas. . . . . " 146
V.13.- Funciones hiperbólicas inversas: concepto. . . . . " 148
V.14.- Propiedades de las funciones hiperbólicas inversas . . . . " 149
Ejercicios a resolver. . . . . " 151

CAPITULO VI: REPRESENTACION GRAFICA EN COORDENADAS POLARES.-

VI.1.- Naturaleza del problema a estudiar. . . . . pag. 153
VI.2.- Espiral de Arquímides . . . . " 153
VI.3.- Espiral hiperbólica . . . . " 156
VI.4.- Espiral logarítmica . . . . " 157
VI.5.- Función sinusoidal. . . . . " 159
a) Tipo $\rho = f(\omega) = k.\ sen\ (m\omega + \alpha)$ . . . . " 159
b) Tipo $\rho = f(\omega) = k.\ cos\ (m\omega + \alpha)$ . . . . " 162
c) Tipo $\rho^2 = f(\omega) = k^2\ sen\ (m\omega + \alpha)$ . . . . " 165
d) Tipo $\rho^2 = f(\omega) = k^2\ cos\ (m\omega + \alpha)$ . . . . " 167
VI.6.- Suma gráfica de radio-vedtores. . . . . " 169

CAPITULO VII: FUNCIONES PARAMETRICAS.-

VII.1.- Naturaleza del problema a estudiar . . . . " 173
VII.2.- Cicloides. . . . . " 173
VII.3.- Epicicloides . . . . " 175
VII.4.- Hipocicloides. . . . . " 178

CAPITULO VIII: EL LIMITE FUNCIONAL.-

VIII.1.- Límite de una función . . . . " 181
VIII.2.- Propiedades de los límites. . . . . " 183
VIII.3.- Infinitésimos . . . . " 184
VIII.4.- Operaciones con infinitésimos . . . . " 184
VIII.5.- Cálculo de límites. . . . . " 185
VIII.6.- Límites infinitos . . . . " 188
VIII.7.- Variable infinita . . . . " 189
VIII.8.- Límites infinitos con variables infinitas . . . . " 190
VIII.9.- Indeterminación: generalidades. . . . . " 190
VIII.10.-Indeterminación $\frac{0}{0}$ . . . . " 191
VIII.11.-Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . " 195
VIII.12.-Indeterminación $\infty - \infty$ . . . . " 197

CAPITULO IX: FUNCIONES RACIONALES FRACCIONARIAS.-

IX.1.Naturaleza del problema a estudiar. . . . . pag. 201
IX.2.Raíces. . . . . " 201
IX.3.Asíntotas . . . . " 203
IX.4.Intersecciones. . . . . " 206
IX.5.Representación gráfica de funciones racionales fraccionarias. . " 207
IX.6.Hipérbolas. . . . . " 215
a) Generalidades. . . . . " 215
b) Tipo $f(x) = \frac{a}{x^n}$ . . . . " 215
c) Tipo $f(x) = \frac{a}{Q(x)}$ . . . . " 217
IX.7.Función homográfica . . . . " 219

--- 0o0 ---